

1915.

LIBRARY
MICHIGAN STATE NORMAL
COLLEGE

No. 3.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. V. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 46. Heft 8.

DER GANZEN REIHE 361. BANDES 8. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTERMITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1915.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIVS BARTH.
DÖRRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.

(Ausgegeben am 12. Februar 1915.)

Inhalt.

	Seite
1. Stephan Rybár. Über die Phasenänderungen der inneren Totalreflexion an den doppelbrechenden Kristallen	305
2. Stephan Rybár. Untersuchungen über die Phasenänderungen des reflektierten Lichtes	327
3. W. Gaede. Die Diffusion der Gase durch Quecksilberdampf bei niederen Drucken und die Diffusionsluftpumpe	357
4. R. Schachenmeier. Theoretisches über Gleitflächen und Kristallplastizität im allgemeinen	393
5. Erwin Schrödinger. Notiz über den Kapillardruck in Gasblasen	413
6. Herbert Augustin. Über die Dichte des flüssigen Wasserstoffs, den Brechungsponenten und die Dispersion des flüssigen Wasserstoffs und des flüssigen Stickstoffs	419
7. J. Koenigsberger und G. Gottstein. Galvano- und thermomagnetische Effekte variabler Leiter und Metalle	446

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Fleischerring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Mit einer Umarbeitung meiner „Ziele der Leuchttechnik“ behufs vermehrter Neuauflage beschäftigt, bitte ich die Herren Kollegen und alle Interessenten, mir Ihre diesbezügliche Separata und geeignetes Material zuzusenden zu wollen.

Dr. Otto Lummer, Breslau, Geopertstraße 1.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 46.

1. Über die Phasendänderungen der inneren Totalreflexion an den doppelbrechenden Kristallen; von Stephan Rybár.

(Vorgelegt der Ungar. Akad. d. Wiss. am 19. Okt. 1914.)

§ 1. Zweck der Untersuchung. — § 2. Reflexion und Brechung an der Grenze eines Kristalles gegen ein isotropes Medium. — § 3. Die Phasendänderungen des total reflektierten Lichtes. a) Allgemeiner Fall. b) Die Einfallsebene ist eine Symmetrieebene. — § 4. Die Energie des total reflektierten Lichtes. — § 5. Beobachtungsergebnisse.

§ 1. Zweck der Untersuchung.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der Phasendänderungen der im Innern der anisotropen Medien erfolgenden Totalreflexion.

Wie bekannt, löst sich im allgemeinen jedes im anisotropen Medium gegen das isotrope Medium fortschreitende Lichtbündel bei der an der Grenzfläche der beiden (anisotropen und isotropen) Medien erfolgenden Reflexion und Refraktion in zwei reflektierte und ein gebrochenes Lichtbündel auf. Die beiden reflektierten Lichtbündel pflanzen sich im anisotropen Medium in verschiedenen Richtungen und mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten fort, während hingegen das gebrochene Bündel aus dem anisotropen Medium in das isotrope tritt.

Es drängt sich jetzt die Frage auf: ändert sich die Phase des Lichtes bei der Reflexion oder nicht und wenn sie eine Änderung erleidet, wie groß ist sie bei dem einzelnen reflektierten Lichtbündel?

Die Untersuchung dieser Frage ist besonders für den Fall der *Totalreflexion* wünschenswert, weil dann infolge des imaginären Wertes des Brechungswinkels die Amplituden beider reflektierten Lichtbündel komplex sind, welcher Um-

stand laut der Fresnelschen Auffassung, wie bekannt, eine Phasenänderung bedeutet.

Ein Teil dieser Frage wurde von B. Brunhes¹⁾ experimentell gelöst, indem er mit Hilfe der Fizeau-Foucaultschen Interferenzmethode die Differenz der Phasenänderungen dieser beiden reflektierten Lichtbündel feststellte. Die von B. Brunhes angestellten Untersuchungen beziehen sich demnach auf die Differenz der Phasenänderungen der beiden reflektierten Lichtbündel und *nicht* auf die absoluten Phasenänderungen der einzelnen reflektierten Lichtbündel.

Jene Versuchsmethode hingegen, mittels welcher ich die absoluten Phasenänderungen des von der Grenzfläche vom *isotropen* Medium reflektierten Lichtes bestimmte²⁾, ermöglicht auch die Untersuchung der Phasenänderungen der beiden vorhin erwähnten (von der Grenzfläche der *anisotropen* Medien) reflektierten Lichtbündel.

Ich befasse mich demnach zunächst, die Frage theoretisch zu lösen, um hierauf zur Besprechung meiner Versuchsbeobachtungen zu schreiten.

§ 2. Reflexion und Brechung an der Grenze eines Kristalls gegen ein isotropes Medium.

Nehmen wir an, daß sich im Kristall periodische Schwingungen fortpflanzen. Beziehen wir die fortschreitende ebene Welle auf ein rechtwinkliges sonst ganz beliebiges Koordinatensystem $X' Y' Z'$, dessen eine Koordinatenebene, die Ebene $X' Z'$ parallel zur Wellennormale liegt, dann können wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit q und das Polarisationsazimut ψ (d. h. den Winkel, welchen die Polarisationsebene mit der Ebene $X' Z'$ bildet) mittels folgender, wohlbekannter Gleichungen berechnen:³⁾

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} (q^2 - a_{22})(q^2 - a_{11} \cos^2 i - a_{33} \sin^2 i + 2a_{31} \sin i \cos i) \\ = (a_{23} \sin i - a_{12} \cos i)^2 \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{q^2 - a_{22}}{a_{12} \cos i - a_{23} \sin i}$$

1) B. Brunhes, Ann. de Chim. et de Phys. (6) 30. p. 98, 145. 1893; Journ. de Phys. (3) 2. p. 489. 1893.

2) St. Rybár, Ann. d. Phys. 42. p. 1171. 1913. In ungarischer Sprache im M. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Értesítője 32. p. 1—30. 531—564. 1914 erschienen.

3) F. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik p. 179. 1906.

wobei i den Winkel zwischen der Wellennormale und der positiven Achse Z' bedeutet, während a_{ik} die auf das Koordinatensystem $X' Y' Z'$ bezogenen Voigtschen optischen Parameter des Kristalls bedeuten. Bekanntlich lassen sich letztere aus den Hauptlichtgeschwindigkeiten a_1, a_2, a_3 des Kristalls auf folgende Weise ableiten. Sind die Richtungskosinus des Koordinatensystems $X' Y' Z'$ gegen die Hauptachsen XYZ des Kristalls durch das Schema¹⁾

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{c|ccc} & X' & Y' & Z' \\ \hline X & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ Y & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Z & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array} \right.$$

gegeben, so ist

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = a_1^2 \alpha_1^2 + a_2^2 \beta_1^2 + a_3^2 \gamma_1^2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{23} = a_1^2 \alpha_2 \alpha_3 + a_2^2 \beta_2 \beta_3 + a_3^2 \gamma_2 \gamma_3 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Um die Reflexions- und Brechungsgesetze in möglichst einfachen Formeln darzustellen, ist es zweckmäßig, die Koordinatenebene $X' Y'$ des bisher nur nach Belieben gewählten Koordinatensystems parallel zur Grenzfläche des anisotropen und isotropen Mediums, die Koordinatenebene $X' Z'$ dagegen parallel zur Einfallsebene wählen.

Sowohl die beiden reflektierten, als auch die gebrochene Wellennormale liegen in der Einfallsebene und bilden mit der positiven Achse Z' (mit dem Einfallslot) einen Winkel von i_r , i_n bzw. i_g , welche durch die Gleichung²⁾

$$(5) \quad \frac{\sin i_e}{q_e} = \frac{\sin i_{r_1}}{q_{r_1}} = \frac{\sin i_{r_2}}{q_{r_2}} = \frac{\sin i_g}{c} = \frac{1}{k}$$

festgestellt sind, wobei i_e den Einfallswinkel, q_e, q_{r_1}, q_{r_2} die Geschwindigkeiten der einfallenden und der beiden reflektierten Wellen, c die Geschwindigkeit der gebrochenen, sich im isotropen Medium fortpflanzenden Welle bedeuten.

Bei Berücksichtigung dieser Gleichungen können die

1) F. Pockels, l. c. p. 97. 66.
2) F. Pockels, l. c. p. 95. 180.

Gleichungen (1) und (2) nach Elimination von q folgendermaßen geschrieben werden¹:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} [a_{22} + (a_{23} - k^2) \operatorname{tg}^2 i] [a_{11} - 2a_{31} \operatorname{tg} i + (a_{33} - k^2) \operatorname{tg}^2 i] \\ = (a_{12} - a_{23} \operatorname{tg} i)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 i) \end{aligned} \right.$$

$$(7) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{(k^2 - a_{33}) \operatorname{tg}^2 i - a_{23}}{(a_{12} - a_{23} \operatorname{tg} i) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 i}}.$$

Die erste Gleichung bestimmt die zum gegebenen Einfallswinkel i_e und zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit q_e , somit die zur gegebenen Größe von k gehörenden Reflexionswinkel i_r , i_{r_1} , die zweite hingegen die Polarisationsazimute der einfallenden und der reflektierten Wellen.

Die Amplituden der beiden reflektierten und der gebrochenen Wellen können aus den Grenzbedingungen berechnet werden.²) Diese sind in unserem speziellen Falle, wenn das Medium, in welches das Licht einfällt, *anisotrop* ist, und jenes, in welchem sich das gebrochene Licht fortpflanzt *isotrop* ist, folgende:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} E \cos i_e \cos \psi_e + R_1 \cos i_{r_1} \cos \psi_{r_1} + R_2 \cos i_{r_2} \cos \psi_{r_2} &= G_p \cos i_g \\ E \sin \psi_e + R_1 \sin \psi_{r_1} + R_2 \sin \psi_{r_2} &= G_s \\ E \sin i_e \cos \psi_e + R_1 \sin i_{r_1} \cos \psi_{r_1} + R_2 \sin i_{r_2} \cos \psi_{r_2} &= G_p \sin i_g \\ E \varrho_e \sin \psi_e + R_1 \varrho_{r_1} \sin \psi_{r_1} + R_2 \varrho_{r_2} \sin \psi_{r_2} &= G_s \end{aligned} \right.$$

wobei E die Amplitude der einfallenden Welle, R_1 und R_2 jene der beiden reflektierten Wellen, $G = \sqrt{G_s^2 + G_p^2}$ jene der gebrochenen Welle bedeuten und

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \varrho_e &= \frac{\operatorname{tg} i_g}{c^2 \sin i_e} [a_{11} \cos i_e - a_{31} \sin i_e + a_{12} \cotg \psi_e] \\ \varrho_{r_1} &= \frac{\operatorname{tg} i_g}{c^2 \sin i_{r_1}} [a_{11} \cos i_{r_1} - a_{31} \sin i_{r_1} + a_{12} \cotg \psi_{r_1}] \\ \varrho_{r_2} &= \frac{\operatorname{tg} i_g}{c^2 \sin i_{r_2}} [a_{11} \cos i_{r_2} - a_{31} \sin i_{r_2} + a_{12} \cotg \psi_{r_2}]. \end{aligned} \right.$$

Das Reflexions- und Refraktionsproblem wird somit auf folgende Weise gelöst.

Wir erhalten aus der Gleichung (1) die zum gegebenen Einfallswinkel i_e gehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten.

1) F. Pockels, l. c. p. 180, 181.

2) F. Pockels, l. c. p. 182.

Die beiden positiven Wurzeln dieser Gleichung drücken die Geschwindigkeiten der beiden, sich in der Richtung i_e fort-pflanzenden Wellen aus, die zwei negativen Wurzeln bedeuten dagegen jene der beiden sich in der Richtung von $180^\circ - i_e$ ausbreitenden Wellen. Wir können nun aus den beiden positiven Wurzeln die Geschwindigkeit q_e auswählen, die zur untersuchenden Welle gehört. Hierauf bilden wir mit Hilfe

$$(10) \quad k = \frac{q_e}{\sin i_e}$$

(5) die Gleichung (6). Die beiden größeren (zwischen 90° und 180° fallenden) Wurzeln der Gleichung (6) liefern die Reflexionswinkel i_{r_1} und i_{r_2} der beiden reflektierten Wellen. Ferner erhalten wir mit Hilfe der so berechneten Werte von i_e , i_{r_1} und i_{r_2} aus den Formeln (7) die Polarisationsazimute ψ_e , ψ_{r_1} und ψ_{r_2} , und endlich aus den Gleichungen (8) die Amplituden der beiden reflektierten und der gebrochenen Wellen.

§ 3. Die Phasenänderungen des total reflektierten Lichtes.

a) Allgemeiner Fall.

Nach erfolgter Zusammenstellung der zu den weiteren Betrachtungen notwendigen und bereits bekannten Formeln, können wir zur Besprechung der Phasenänderungen der Totalreflexion übergehen.

Aus den Grenzbedingungen (8) folgt:

$$(11) \quad \begin{cases} R_1 = \frac{(1 - \varrho_e) \sin \psi_e \cos \psi_{r_2} \sin(i_e - i_{r_2}) - (1 - \varrho_{r_2}) \cos \psi_e \sin \psi_{r_2} \sin(i_e - i_e)}{(1 - \varrho_{r_2}) \sin \psi_{r_2} \cos \psi_{r_1} \sin(i_e - i_{r_1}) - (1 - \varrho_{r_1}) \cos \psi_{r_2} \sin \psi_{r_1} \sin(i_e - i_{r_2})} E \\ \quad = \sigma_1 E \\ R_2 = \frac{(1 - \varrho_e) \sin \psi_e \cos \psi_{r_1} \sin(i_e - i_{r_1}) - (1 - \varrho_{r_1}) \cos \psi_e \sin \psi_{r_1} \sin(i_e - i_e)}{(1 - \varrho_{r_1}) \sin \psi_{r_1} \cos \psi_{r_2} \sin(i_e - i_{r_2}) - (1 - \varrho_{r_2}) \cos \psi_{r_1} \sin \psi_{r_2} \sin(i_e - i_{r_1})} E \\ \quad = \sigma_2 E. \end{cases}$$

Sind eine oder mehrere der Größen von i_{r_1} , i_{r_2} , i_e komplex oder imaginär, so können auch σ_1 und σ_2 komplexe Werte sein. Bekanntlich wird die Reflexion in diesem Falle von einer Phasenänderung begleitet. Die Argumente δ_1 und δ_2 der komplexen Amplituden

$$\sigma_1 = s_1 e^{i\delta_1} \quad \sigma_2 = s_2 e^{i\delta_2}$$

geben uns die gesuchten Phasenänderungen.

Mit Hilfe der Formeln (5) und (1) ist leicht zu ersehen, daß nur einer der Reflexionswinkel von i_r und i_n , und zwar derjenige, welcher zu der sich schneller fortpflanzenden Welle gehört, eine komplexe Größe sein kann, und zwar nur bei einem genügend großen Einfallswinkel, und auch nur dann, wenn die langsamere Welle einfällt. Hingegen ist i_g bei der Totalreflexion überall imaginär.

Bei der Totalreflexion des Lichtes können wir deshalb folgende Fälle unterscheiden:

1. Fällt die schnellere Welle ein, dann wird die Phasenänderung beider reflektierter Wellen *nur* durch die Totalreflexion des Lichtes verursacht.

2. Fällt dagegen die langsamere Welle ein, so tritt die Phasenänderung, solange i_r und i_n reelle Größen bleiben, *ausschließlich* nur infolge der Totalreflexion ein; erreicht aber bei wachsendem Einfallswinkel der Reflexionswinkel der reflektierten schnelleren Welle den Wert von 90° , und wird derselbe komplex, so wird die Phasenänderung der reflektierten langsameren Welle *teilweise* durch die Totalreflexion und *teilweise* durch das Verschwinden der reflektierten schnelleren Welle verursacht.

Die Berechnungsmethode der Phasenänderung im allgemeinen Fall habe ich obenstehend erläutert. Die Darstellung dieser Phasenänderung in expliziter Form ist im allgemeinen Fall überhaupt unmöglich oder so kompliziert, daß ich mich mit dieser Frage nur in speziellen Fällen befassen kann.

b) Die Einfallsebene ist eine optische Symmetrieebene.

Die Phasenänderung der totalen Reflexion bestimmen wir in jenem speziellen Fall, in welchem die Einfallsebene *parallel* zu einer *Symmetrieebene* des Kristalles liegt.

Da in diesem Falle die beiden optischen Parameter a_{11} , a_{12} verschwinden, so zerfallen die Gleichung (1) und (6) in zwei quadratische Gleichungen. Demnach können die zum gegebenen Einfallswinkel i gehörenden beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten q_1 und q_2 , ferner die zur gegebenen Größe k gehörenden beiden Reflexionswinkel i_r und i_n voneinander getrennt werden.

Die beiden verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der einfallenden Welle sind nach (1)

$$(12) \quad \begin{cases} q_1^2 = a_{22} \\ q_2^2 = a_{11} \cos^2 i_e + a_{33} \sin^2 i_e - 2a_{13} \sin i_e \cos i_e \end{cases}$$

und die beiden Reflexionswinkel nach (6)

$$(13) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} i_{r_1} = -\sqrt{\frac{a_{22}}{k^2 - a_{22}}} \\ \operatorname{tg} i_{r_2} = \frac{a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 + a_{11}(k^2 - a_{33})}}{a_{33} - k^2} \end{cases}$$

Bei unseren weiteren Betrachtungen müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die einfallende Welle sich mit einer Geschwindigkeit von q_1 oder von q_2 fortpflanzt.

1. Nehmen wir zunächst an, daß sich die einfallende Welle mit einer Geschwindigkeit von $q_1 = \sqrt{a_{22}}$ ausbreitet.

Die zu dieser einfallenden Welle gehörenden Reflexionswinkel leiten wir aus den Formeln (13) ab, indem wir an Stelle von k^2 den Wert

$$(14) \quad k^2 = \frac{a_{22}}{\sin^2 i_e}$$

einsetzen. So wird

$$(15) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} i_{r_1} = -\operatorname{tg} i_e & i_{r_1} = 180^\circ - i_e \\ \operatorname{tg} i_{r_2} = -\frac{a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 + a_{11} \left(\frac{a_{22}}{\sin^2 i_e} - a_{33} \right)}}{\frac{a_{22}}{\sin^2 i_e} - a_{33}} \end{cases}$$

Ebenso erhalten wir die Polarisationsazimute der einfallenden und der beiden reflektierten Wellen aus (7), wenn wir an Stelle des darin vorkommenden Winkels i die entsprechenden Winkel i_e , i_{r_1} , i_{r_2} einsetzen. Die Zähler dieser Formel sind:

$$\begin{aligned} \text{wenn } i = i_e \quad & (k^2 - a_{22}) \operatorname{tg}^2 i_e - a_{22} = \left(\frac{a_{22}}{\sin^2 i_e} - a_{22} \right) \operatorname{tg}^2 i_e - a_{22} = 0 \\ \text{,, } i = i_{r_1} \quad & (k^2 - a_{22}) \operatorname{tg}^2 i_{r_1} - a_{22} = (k^2 - a_{22}) \operatorname{tg}^2 i_e - a_{22} = 0 \\ \text{,, } i = i_{r_2} \quad & (k^2 - a_{22}) \operatorname{tg}^2 i_{r_2} - a_{22} \neq 0, \end{aligned}$$

die Nenner hingegen verschwinden in allen drei Fällen, da unserer Voraussetzung entsprechend $a_{13} = 0$ und $a_{23} = 0$ ist. Demgemäß ist die Formel (6) bezüglich ψ in den beiden ersten Fällen unbestimmt, im dritten hingegen liefert sie für das

Polarisationsazimut den Wert $\psi_{r_2} = 90^\circ$. Wir müssen also die Werte von ψ_e und ψ_{r_1} auf andere Weise bestimmen.

Es ist nämlich bekannt, daß einerseits die Polarisations-ebenen der in ein und derselben Richtung, jedoch mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortschreitenden beiden Wellen zu einander senkrecht stehen, und daß andererseits der Wert von ψ_{r_2} unabhängig von den Werten i_{r_2} immer 90° beträgt, deshalb müssen sowohl ψ_e , als auch ψ_{r_1} den Wert 0° haben. Demnach ist

$$\psi_e = 0, \quad \psi_{r_1} = 0, \quad \psi_{r_2} = 90^\circ.$$

Bei Berücksichtigung dieser Werte erhalten wir aus den Formeln (11):

$$R_1 = - \frac{\sin(i_e - i_g)}{\sin(i_{r_1} - i_g)} E = - \frac{\sin(i_e - i_g)}{\sin(i_e + i_g)} E,$$

$$R_2 = 0$$

und aus den Formeln (5) und (14)

$$\frac{\sin i_e}{\sin i_g} = \frac{\sqrt{a_{22}}}{c}.$$

Dementsprechend wird bei der Reflexion nur eine einzige Welle reflektiert, die in der Einfallsebene polarisiert ist und sich mit einer Geschwindigkeit von $q_1 = \sqrt{a_{22}}$ fortpflanzt.

Die Amplitude dieser reflektierten Welle stimmt mit der einen Fresnelschen Reflexionsformel überein, und zwar mit jener, die zu der in der Einfallsebene polarisierten Komponente gehört.

Wir gewinnen demnach die Phasenänderungen der totalen Reflexion *direkt* aus den für *isotrope* Medien gültigen Formeln, wenn wir in denselben an Stelle des Brechungsexponenten $c/\sqrt{a_{22}}$ setzen.

Bedeutet c die Geschwindigkeit im isotropen Medium und ist $c/\sqrt{a_{22}} > 1$, so ist der Grenzwinkel der Totalreflexion gleich

$$\Phi = \arcsin \frac{\sqrt{a_{22}}}{c}.$$

Die Amplitude der reflektierten Welle ist bei partieller Reflexion positiv-reell, bei totaler Reflexion hingegen ist sie

eine komplexe Größe. Die komplexe Amplitude kann durch die Formel

$$R_1 = E e^{i\delta_1}$$

ausgedrückt werden, wobei die Phasenänderung δ_1 durch

$$\cos \delta_1 = \frac{\frac{c^2}{a_{22}} (\cos^2 i_e - \sin^2 i_e) + 1}{\frac{c^2}{a_{22}} - 1}$$

$$\sin \delta_1 = \frac{2 \frac{c}{\sqrt{a_{22}}} \cos i_e \sqrt{\frac{c^2}{a_{22}} \sin^2 i_e - 1}}{\frac{c^2}{a_{22}} - 1}$$

bestimmt wird.

Die Phasenänderung ist an der Grenze der totalen Reflexion gleich Null, bei wachsendem Einfallswinkel nimmt sie stetig bis 180° zu und erreicht diesen Wert bei streifendem Einfall.

2. Nehmen wir jetzt an, daß sich die einfallende Welle mit einer Geschwindigkeit von

$$q_e = \sqrt{a_{11} \cos^2 i_e - 2 a_{13} \sin i_e \cos i_e + a_{33} \sin^2 i_e}$$

ausbreitet (vgl. Formel (12)).

Die zu dieser einfallenden Welle gehörenden Reflexionswinkel erhalten wir mittels der Formeln (13), wenn wir k^2 durch

$$(16) \quad k^2 = \frac{q_e^2}{\sin^2 e} = a_{11} \cotg^2 i_e - 2 a_{13} \cotg i_e + a_{33}$$

ersetzen. Diese sind:

$$(17) \quad \begin{cases} \tg i_{r_1} = - \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11} \cotg^2 i_e - 2 a_{13} \cotg i_e + a_{33} - a_{22}}} \\ \tg i_{r_2} = - \frac{a_{11}}{a_{11} \cotg i_e - 2 a_{13}} \end{cases}$$

Wir gelangen nun mittels dieser Formeln und durch ähnliche bereits im früheren Fall angewandte Betrachtungen zum Resultat, daß die Polarisationsazimute der einfallenden und der beiden reflektierten Wellen folgende Werte haben

$$\psi_e = 90^\circ, \quad \psi_{r_1} = 0^\circ, \quad \psi_{r_2} = 90^\circ.$$

Somit sind die Amplituden der reflektierten Wellen aus (11) und (9)

$$R_1 = 0,$$

$$R_2 = -\frac{1 - \varrho_c}{1 - \varrho_{r_2}} E = -\frac{\cotg i_g - \frac{1}{c^2} (a_{11} \cotg i_e - a_{13})}{\cotg i_g - \frac{1}{c^2} (a_{11} \cotg i_{r_2} - a_{13})} E,$$

wobei zwischen i_e und i_g nach (5) und (16) die Beziehung

$$(18) \quad \cotg i_g = + \frac{1}{c} \sqrt{a_{11} \cotg^2 i_e - 2a_{13} \cotg i_e + a_{33} - c^2}$$

besteht.

Dementprechend wird auch im gegenwärtigen Falle nur eine einzige Welle reflektiert, welche senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, und, wie aus (1) hervorgeht, sich mit einer Geschwindigkeit von

$$(19) \quad q_{r_2} = \sqrt{a_{11} \cos^2 i_{r_2} - 2a_{13} \sin i_{r_2} \cos i_{r_2} + a_{33} \sin^2 i_{r_2}}$$

fortpflanzt.

Bei Berücksichtigung der Formeln (17) und (18) kann die Amplitude dieser Welle folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$(20) \quad R_2 = \frac{\frac{1}{c^2} (a_{11} \cotg i_e - a_{13}) - \frac{1}{c} \sqrt{a_{11} \cotg^2 i_e - 2a_{13} \cotg i_e + a_{33} - c^2}}{\frac{1}{c^2} (a_{11} \cotg i_e - a_{13}) + \frac{1}{c} \sqrt{a_{11} \cotg^2 i_e - 2a_{13} \cotg i_e + a_{33} - c^2}} E.$$

Untersuchen wir nun die Abhängigkeit der Werte von R_2 vom Einfallswinkel.

Bei sehr kleinem Einfallswinkel ist

$$R_2 = \frac{\frac{a_{11}}{c^2} - \frac{\sqrt{a_{11}}}{c}}{\frac{a_{11}}{c^2} + \frac{\sqrt{a_{11}}}{c}} E = -\frac{\frac{c}{\sqrt{a_{11}}} - 1}{\frac{c}{\sqrt{a_{11}}} + 1} E.$$

Demnach ist das Vorzeichen von R_2 bei normalem Einfall negativ oder positiv, je nachdem $c/\sqrt{a_{11}}$ größer oder kleiner als die Einheit ist. Da sich die Amplitude E auf die einfallende, R_2 auf die reflektierte Wellennormale bezieht und diese beiden Normalen eine entgegengesetzte Richtung haben, so haben die Amplituden der einfallenden und der reflektierten Wellen gleiche oder entgegengesetzte Richtungen, je nachdem $c/\sqrt{a_{11}}$ größer oder kleiner als die Einheit ist.

R_2 ist gleich Null, bei einem Einfallswinkel von P , bei welchem der Zähler in (20) verschwindet. Von den beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung hat nur

$$(21) \quad \cotg P = \frac{a_{13}}{a_{11}} + \frac{c^2}{a_{11}} \sqrt{\frac{\frac{a_{13}^2}{c^4} + \frac{a_{11}}{c^2} \left(1 - \frac{a_{33}}{c^2}\right)}{1 - \frac{a_{11}}{c^2}}}$$

eine physikalische Bedeutung.

Dieser Ausdruck ist die verallgemeinerte Form der den Brewsterschen Winkel bestimmenden Gleichung

$$\cotg P = n.$$

Wir können uns davon sofort überzeugen, wenn wir das Kristall isotrop machen, d. h. wenn wir nämlich annehmen, daß die Hauptlichtgeschwindigkeiten des Mediums gleich sind ($a_1 = a_2 = a_3 = c'$) und wir die Werte (4)

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0 \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = c'^2 \quad \frac{c}{c'} = n$$

in der Gleichung (21) einsetzen.

Die Amplitude der reflektierten Welle ändert bei diesem Einfallswinkel P ihr Vorzeichen.

Beschäftigen wir uns nun mit der totalen Lichtreflexion.

Nehmen wir somit an, daß c größer als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einfallenden Welle ist. Da nach (5) i_g bei jedem Einfallswinkel größer ist als i_c , so gelangen wir bei wachsendem Einfallswinkel zu einem solchen von Φ , bei welchem der Brechungswinkel i_c den Wert von 90° erreicht. Dieser Winkel Φ ist der Grenzwinkel der Totalreflexion, der nach (18) aus der Gleichung

$$a_{11} \cotg^2 \Phi - 2a_{13} \cotg \Phi + a_{33} - c^2 = 0$$

durch die Formel:

$$\cotg \Phi = \frac{a_{13}}{a_{11}} + \frac{c^2}{a_{11}} \sqrt{\frac{\frac{a_{13}^2}{c^4} + \frac{a_{11}}{c^2} \left(1 - \frac{a_{33}}{c^2}\right)}{1 - \frac{a_{11}}{c^2}}}$$

bestimmt wird.

Sowohl i_g , als auch R_2 haben bei größerem Einfallswinkel als Φ komplexe Werte. Es ergibt sich nämlich aus (18) und (20), daß

$$\cotg i_g = -\sqrt{-1} \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - (a_{11} \cotg^2 i_e - 2a_{13} \cotg i_e + a_{33})}$$

$$R_2 = \frac{\frac{1}{c^2} (a_{11} \cotg i_e - a_{13}) + \sqrt{-1} \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - (a_{11} \cotg^2 i_e - 2a_{13} \cotg i_e + a_{33})}}{\frac{1}{c^2} (a_{11} \cotg i_e - a_{13}) - \sqrt{-1} \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - (a_{11} \cotg^2 i_e - 2a_{13} \cotg i_e + a_{33})}} E$$

ist, wobei das negative Vorzeichen von $\pm \sqrt{-1}$ zu benutzen ist, wenn wir nicht mit jener Erfahrungssache in Widerspruch gelangen wollen, nämlich, daß bei der Totalreflexion die Amplitude der gebrochenen Welle im Innern des isotropen Mediums exponentiell abnimmt.

Demnach erleidet das Licht bei der Totalreflexion eine Phasenänderung. Schreiben wir

$$(22) \quad R_2 = E e^{i\delta_2},$$

so ergibt sich, daß die Phasenänderung durch

$$\cos \delta_2 = \frac{(a_{11} \cotg^2 i_e - 2a_{13} \cotg i_e)(a_{11} + c^2) + a_{13}^2 + a_{33} c^2 - c^4}{(a_{11} \cotg^2 i_e - 2a_{13} \cotg i_e)(a_{11} - c^2) + a_{13}^2 - a_{33} c^2 + c^4}$$

$$\sin \delta_2 = \frac{2c(a_{11} \cotg i_e - a_{13}) \sqrt{c^2 - (a_{11} \cotg^2 i_e - 2a_{13} \cotg i_e + a_{33})}}{(a_{11} \cotg^2 i_e - 2a_{13} \cotg i_e)(a_{11} - c^2) + a_{13}^2 - a_{33} c^2 + c^4}$$

bestimmt wird.

Für die Untersuchung dieser Phasenänderung bilden wir

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} = \frac{c \sqrt{c^2 - (a_{11} \cotg^2 i_e - 2a_{13} \cotg i_e + a_{33})}}{a_{11} \cotg i_e - a_{13}}.$$

Dementsprechend ist die Phasenänderung am Grenzwinkel der Totalreflexion gleich Null, bei wachsendem Einfallswinkel nimmt sie stetig zu und erreicht bei streifendem Einfall einen Wert von

$$(\delta_2)_{i_e=90^\circ} = 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{c \sqrt{c^2 - a_{33}}}{a_{13}} \right).$$

Während demnach bei streifendem Einfall die Phasenänderung im Fall der isotropen Medien unabhängig vom Brechungsexponent immer 180° beträgt, so hängt sie im Falle anisotroper Medien auch dann noch, wenn die Einfallsebene eine Symmetrieebene ist, von den optischen Parametern des Kristalles ab. Diese maximale Phasenänderung ist größer oder kleiner als 180° je nachdem a_{13} positiv oder negativ ist; sie wird den Wert von 180° erreichen, wenn $a_{13} = 0$ ist.

Untersuchen wir nun, bei welcher Lage der optischen Achse des einachsigen Kristalles diese Erscheinung eintreten wird. Da bei einachsigen Kristallen $a_1 = a_2 = o$, $a_3 = e$ ist, so ist nach (4)

$$a_{13} = o^2(a_1 a_3 + \beta_1 \beta_3) + e^2 \gamma_1 \gamma_3 = (e^2 - o^2) \gamma_1 \gamma_3.$$

Demgemäß ist $a_{13} = 0$, wenn entweder $\gamma_1 = 0$ oder $\gamma_3 = 0$ ist. In unserem gegenwärtigen Falle, wenn nämlich die Einfallsebene parallel zu der einen Symmetrieebene liegt, wird die Phasenänderung, wie aus Fig. 1 mit Hilfe der Schema (3) zu ersehen ist, nur dann bei streifendem Einfall 180° betragen, wenn die optische Achse des einachsigen Kristalles, d. h. die positive Achse Z entweder 1. senkrecht zur Einfallsebene ($\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = 0$), oder 2. senkrecht zur Grenzfläche ($\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$) steht, oder schließlich 3. parallel zur Schnittlinie der Einfallsebene und der Grenzfläche ($\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$) liegt.

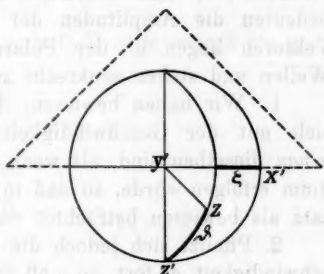


Fig. 1.

§ 4. Die Energie des total reflektierten Lichtes.

Die ganze einfallende Energie wird bei der Totalreflexion reflektiert.

Den Beweis dieses Satzes werden wir hinsichtlich der vorhin behandelten Symmetriefälle erbringen.

Bezeichnen wir die elektrische Kraft mit $\mathfrak{E}(X, Y, Z)$ die magnetische $\mathfrak{H}(L, M, N)$, dann wird die Energieströmung, wie bekannt ist, durch den Poyntingschen Vektor

$$\mathfrak{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]$$

ausgedrückt. Demgemäß ist die Richtung dieser Energieströmung die positive Normale der mit den Vektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{H} definierten Ebene, ihre Intensität jedoch gleich

$$(23) \quad \frac{c}{4\pi} E H \sin \omega,$$

wobei E den absoluten Wert der elektrischen, H jenen der magnetischen Kraft, c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, ω jedoch den mit den Vektoren \mathcal{E} und \mathcal{H} gebildeten Winkel bedeuten.

Zum Beweise unserer obigen Behauptung müssen wir zuerst die sich in der einfallenden und reflektierten Welle fort-pflanzende Energie bestimmen.

Die in den Grenzbedingungen (8), sowie auch in den Formeln (11) vorkommenden Amplituden E , R_1 , R_2 , G_1 , G_2 bedeuten die Amplituden der magnetischen Kräfte.¹⁾ Diese Vektoren liegen in der Polarisationssebene der betreffenden Wellen und stehen senkrecht zu ihren Normalen.

1. Wir haben bewiesen, daß wenn die einfallende Welle sich mit der Geschwindigkeit q_1 fortpflanzt, die Resultate *genau* dieselben sind, als wenn die Reflexion im *isotropen* Medium erfolgen würde, so daß in diesem Fall der obige Energiesatz als bewiesen betrachtet werden kann.

2. Pflanzt sich jedoch die einfallende Welle mit der Geschwindigkeit q_2 fort, so muß dieser Energiesatz noch bewiesen werden.

Im gegenwärtigen Fall steht die Polarisationssebene senkrecht zur Einfallsebene (vgl. p. 313), somit sind die Komponenten der zur einfallenden Welle gehörenden magnetischen Kraft

$$L_e = 0 \quad M_e = E \cos \varphi_e \quad N_e = 0,$$

wobei

$$\varphi_e = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \sin i_e + z \cos i_e}{q_e} + \delta_e \right)$$

ist. Der Zahlenwert der magnetischen Kraft ist somit

$$(24) \quad H_e = E \cos \varphi_e$$

und ihre Richtungskosinusse

$$(25) \quad f = 0 \quad g = 1 \quad h = 0.$$

Die elektrische Kraft wird durch

$$X = \frac{1}{c^2} (a_{11} \mathcal{X} + a_{12} \mathcal{Y} + a_{13} \mathcal{Z})$$

$$Y = \frac{1}{c^2} (a_{21} \mathcal{X} + a_{22} \mathcal{Y} + a_{23} \mathcal{Z})$$

$$Z = \frac{1}{c^2} (a_{31} \mathcal{X} + a_{32} \mathcal{Y} + a_{33} \mathcal{Z})$$

1) F. Pockels, l. c. p. 174. 175. 176. 181.

gegeben¹⁾, wenn die elektrische Induktion $J(\mathfrak{X} \mathfrak{Y} \mathfrak{Z})$ durch die Maxwellschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial t} = c \operatorname{curl} \mathfrak{H}$$

bestimmt wird.

Wir gelangen demnach, da $a_{23} = a_{13} = 0$ ist, zum Resultat, daß die elektrischen Kraftkomponenten der einfallenden Welle

$$(26) \quad \begin{cases} X_e = \frac{1}{c q_e} (a_{11} \cos i_e - a_{13} \sin i_e) E \cos \varphi_e = x_e E \cos \varphi_e \\ Y_e = 0 \\ Z_e = \frac{1}{c q_e} (a_{13} \cos i_e - a_{33} \sin i_e) E \cos \varphi_e = x_z E \cos \varphi_e \end{cases}$$

sind; ihr Zahlenwert ist deshalb

$$(27) \quad E_e = \sqrt{x_x^2 + x_z^2} E \cos \varphi_e$$

ihre Richtungskosinusse hingegen

$$(28) \quad a = \frac{x_x}{\sqrt{x_x^2 + x_z^2}}, \quad b = 0, \quad c = \frac{x_z}{\sqrt{x_x^2 + x_z^2}}$$

Da jedoch

$$af + bg + ch = 0$$

ist, so steht die elektrische Kraft senkrecht zur magnetischen Kraft, d. h.

$$(29) \quad \omega = 90^\circ.$$

Demgemäß wird die Richtung der Energieströmung durch die Richtungskosinusse

$$(30) \quad \alpha = -\frac{x_x}{\sqrt{x_x^2 + x_z^2}}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = +\frac{x_z}{\sqrt{x_x^2 + x_z^2}}$$

definiert. Ferner erhalten wir aus der Formel (23) die Intensität dieser Strömung, wenn wir darin die Werte von E , H und ω aus (27), (24) und (29) einsetzen. Deshalb stellt

$$\frac{c}{4\pi} E^2 \sqrt{x_x^2 + x_z^2} \cos^2 \varphi_e$$

die durch die Querschniteinheit durchfließende Energie dar.

Wird das Licht von einem Flächenteil der Grenzfläche in Größe von F reflektiert, so ist die in der einfallenden Welle strömende Totalenergie (vgl. (30), (26)).

1) F. Pockels, l. c. p. 81.

$$U_e = \frac{c}{4\pi} E^2 F \gamma \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_z^2} \cos^2 \varphi_e = \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{E^2}{q_e} F(a_{11} \cos i_e - a_{13} \sin i_e) \cos^2 \varphi_e$$

oder bei Berücksichtigung (5)

$$(31) \quad U_e = + \frac{1}{4\pi} \frac{E^2}{k} F(a_{11} \cotg i_e - a_{13}) \cos^2 \varphi_e$$

Demnach fließt in einer Periode zur Fläche F eine Energiemenge von

$$W_e = \int_0^T U_e dt = \frac{T}{8\pi} \frac{E^2}{k} F(a_{11} \cotg i_e - a_{13})$$

Durch ähnliche Betrachtungen gelangen wir zum Resultat, daß die von der Oberfläche in GröÙe von F reflektierte volle Energie

$$U_r = - \frac{1}{4\pi} \frac{|R_2|^2}{k} F(a_{11} \cotg i_r - a_{13}) \cos^2 \varphi_r$$

ist. Da jedoch gemäß (22) bei der Totalreflexion $|R_2| = E$ und nach (17)

$$\cotg i_r = \frac{2a_{13} - a_{11} \cotg i_e}{a_{11}}$$

ist, so ist

$$(32) \quad U_r = + \frac{1}{4\pi} \frac{E^2}{k} F(a_{11} \cotg i_e - a_{13}) \cos^2 (\varphi_e + \delta_2)$$

und

$$W_r = \int_0^T U_r dt = \frac{T}{8\pi} \frac{E^2}{k} F(a_{11} \cotg i_e - a_{13}),$$

das heißt

$$W_r = W_e.$$

Demnach ergibt sich, daß bei der Totalreflexion die ganze einfallende Energie reflektiert wird. Die Intensität des reflektierten Lichtes ist somit gleich des einfallenden.

§ 5. Beobachtungsergebnisse.

Zur Beobachtung dieser Phasenänderung habe ich dieselbe Versuchsmethode angewandt, mit welcher ich die absoluten Phasenänderungen des von der Grenzfläche der *isotropen* Medien total reflektierten Lichtes untersuchte.

Diese Versuchsmethode habe ich an mehreren Stellen¹⁾ schon erläutert und bekannt gegeben, so daß ich dieselbe als bekannt voraussetzen darf.

Ich befasse mich somit nachstehend nur mit jenen Ergänzungen, die sich auf die Interferenz des von der Grenzfläche der anisotropen Medien reflektierten Lichtes beziehen.

Wenn wir nämlich statt des bei unseren früheren Untersuchungen angewandten Glasprismas ein aus doppelbrechendem Kristall angefertigtes Prisma benützen, dann wird die optische Weglänge der beiden interferierenden Wellen im Prisma wesentlich voneinander verschieden sein. Dies hat zur Folge, daß in dem Interferenzraum hinter dem Prisma keine Interferenzstreifen beobachtet werden können. Wenn wir demnach im reflektierten Lichte scharfe Interferenzstreifen herstellen wollen, dann müssen wir diesen Wegunterschied kompensieren, was wir dadurch leicht erreichen, wenn wir den einen Spiegel des Fresnelschen Doppelspiegels in der Richtung seiner Normale parallel zu sich selbst verschieben. Diese Verschiebung kann gewöhnlich mit Hilfe einer Mikrometerschraube erfolgen.

Demnach geschieht die Herstellung der scharfen Interferenzstreifen auf folgende Weise: Wir verschieben den einen Spiegel des Fresnelschen Doppelspiegels so lange, bis im reflektierten Licht die Interferenzstreifen entstehen; sodann drehen wir die im reflektierten Lichte befindliche Zylinderlinse so lange um das darauf fallende Licht, bis die Streifen ganz scharf werden.²⁾

Für meine Untersuchung verwandte ich ein großes Kalkspatprisma.

Die Hauptbrechungs-exponenten des Kalkspats hinsichtlich der Luft sind für rotes Licht

$$n_o = 1,6555, \quad n_e = 1,4849.$$

Das Prisma wurde so geschliffen, daß die optische Achse mit der äußeren Normale der Hypotenusenfläche des Prismas einen Winkel von (vgl. Fig. 1)

$$\vartheta = 45^\circ 29,3'$$

1) St. Rybár, Ann. d. Phys. 43. p. 1171—1195. 1913.

2) Ich erwähne noch, daß die beiden kohärenten, reellen Lichtlinien nicht mit einer gewöhnlichen, sondern mit einer Zylinderlinse hergestellt wurden.

Substituieren wir diese Werte von a_{jj} und a_{ji} in der Gleichung (1), so finden wir, daß diese Gleichung in zwei quadratische Faktoren zerfällt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der ordinären und extraordinären Welle können voneinander getrennt werden:

$$(34) \quad \begin{cases} q_o = \frac{1}{n_o} \\ q_e = \sqrt{\frac{1}{n_e^2} - \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2}\right)(\gamma_1 \sin i + \gamma_3 \cos i)^2} \end{cases}$$

Die beiden Reflexionswinkel in der Gleichung (6) können ebenfalls voneinander getrennt werden. Der Reflexionswinkel der ordinären Welle wird aus

$$\sin i_{r_o} = \frac{\sin i_o}{n_o q_o} = \frac{1}{k n_o}$$

jenen der extraordinären Welle jedoch aus

$$C_0 \operatorname{tg}^2 i_{r_e} + 2 C_1 \operatorname{tg} i_{r_e} + C_2 = 0$$

berechnet¹⁾, wobei

$$C_0 = \frac{1}{n_e^2} + \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2}\right) \gamma_1^2 - k^2$$

$$C_1 = \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2}\right) \gamma_1 \gamma_3$$

$$C_2 = \frac{1}{n_e^2} + \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2}\right) \gamma_3^2.$$

Nach Zitierung dieser bereits bekannten Formeln gehe ich zur Besprechung meiner Beobachtungsergebnisse über.

Bei meinen Experimenten benutzte ich als Flüssigkeit Ligroin. Der Brechungsexponent dieser Flüssigkeit war hinsichtlich für rotes Licht

$$n = \frac{1}{c} = 1,4000.$$

I. Die einfallende Welle ist die ordinäre Welle. Die gebrochene Welle verschwindet, wie es von (5) leicht zu finden ist, wenn das Licht an der Grenzfläche von Kalkspat und Luft reflektiert wird, bei einem Einfallswinkel von

$$\Phi_o = \arcsin \frac{1}{n_o} = 37^\circ 9,6',$$

1) F. Pockels, l. c. p. 101.

wenn jedoch die Reflexion an der Grenzfläche von Kalkspat und Ligroin erfolgt, bei einem Einfallswinkel von

$$\Phi_o' = \arcsin \frac{n}{n_o} = 57^\circ 44,7'.$$

Die berechneten und beobachteten Phasenänderungen sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

I. Einfallende ordinäre Welle.

a) Reflektierte ordinäre Welle.

i	ψ	i_{r_o}	ψ_{r_o}	δ_o	δ_o'	$\delta_o - \delta_o'$	
						Theor.	Beob.
40°	+79° 2' 50''	+140°	+34° 56' 30''	+65,3°	0°	+65,3°	+58,8°
45	72 7 40	135	34 19 20	90,1	0	90,1	88,4
50	65 49 45	130	33 55 0	102,6	0	102,6	97,8
55	60 14 15	125	33 43 10	112,5	0	112,5	111,1
60	55 22 30	120	33 43 20	121,9	45,9	76,0	80,3
65	51 12 20	115	33 55 50	131,3	81,1	50,2	49,1
70	47 39 40	110	34 20 20	147,3	116,7	30,6	30,9
75	44 40 15	105	34 58 20	162,9	135,7	27,2	27,2

b) Reflektierte extraordinäre Welle.

i	ψ	i_{r_e}	ψ_{r_e}	δ_e	δ_e'	$\delta_e - \delta_e'$	
						Theor.	Beob.
40°	+79° 2' 50''	+134° 23' 20''	-55° 44' 30''	+83,1°	-180°	+263,1°	+261,9°
45	72 7 40	128 0 40	56 11 50	124,4	—	124,4	—
50	65 49 45	121 20 50	56 18 0	147,8	0	147,8	137,9
55	60 14 15	114 13 20	56 1 30	165,6	0	165,6	156,3
60	55 22 30	106 11 50	55 12 0	190,4	+76,7	113,7	118,9
65	51 12 20	95 12 20	53 7 20	197,2	139,3	57,9	58,8

In diesen Tabellen bedeuten: i den Einfallswinkel, ψ , ψ_{r_o} , ψ_{r_e} die Polarisationsazimute, d. h. die Winkel zwischen der Polarisations- und Einfallsebene; δ_o , δ_e die Phasenänderungen der an der Grenzfläche von Kalkspat-Luft erfolgenden Reflexion, δ_o' , δ_e' dagegen jene an der Grenzfläche von Kalkspat-Ligroin sich vollziehende Reflexion. Die Indexen o und e dienen zur Bezeichnung der sich auf die ordinäre oder auf die extraordinäre Welle beziehenden Größen.

II. Die einfallende Welle ist die *extraordinäre* Welle. Der Grenzwinkel der Totalreflexion wird nach (5) aus

$$\frac{q_e^2}{\sin^2 i_e} = c^2,$$

d. h. nach (34) aus der quadratischen Gleichung

$$\frac{1}{n_e^2} (1 + \cotg^2 \Psi) + \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) (\gamma_1 + \gamma_3 \cotg i)^2 = c^2$$

bestimmt. Dieser Grenzwinkel ist, falls das Licht an Kalkspat-Luft reflektiert wird

$$\Phi_e = 38^\circ 48,8',$$

falls die Reflexion an Kalkspat-Ligroin erfolgt:

$$\Phi_e' = 63^\circ 27,3'.$$

Die folgenden Tabellen enthalten die berechneten und beobachteten Resultate.

II. Einfallende extraordinäre Welle.

a) Reflektierte ordinäre Welle.

i	ψ	i_{r_o}	ψ_{r_o}	δ_o	δ_o'	$\delta_o - \delta_o'$	
						Theor.	Beob.
40°	-10° 57' 10''	+141° 44' 30''	+35° 13' 0''	+17,2°	0	+17,2°	+18,0°
45	17 52 20	137 11 10	34 34 10	39,0	0	39,0	38,9
50	24 10 15	132 47 40	34 7 20	52,5	0	52,5	53,0
55	29 45 45	128 37 10	33 50 30	63,3	0	63,3	62,9
60	34 37 30	124 43 50	33 42 50	73,1	0	73,1	72,8
65	38 47 40	121 13 10	33 42 10	81,5	26,2	55,3	54,3
70	42 20 20	118 12 0	33 46 20	90,2	58,8	31,4	31,0
75	45 19 45	115 48 50	33 52 50	95,8	78,3	17,5	18,0

b) Reflektierte extraordinäre Welle.

i	ψ	i_{r_e}	ψ_{r_e}	δ_e	δ_e'	$\delta_e - \delta_e'$	
						Theor.	Beob.
40°	-10° 57' 10''	+136° 33' 20''	-55° 29' 40''	+27,9°	0	+27,9°	+27,2°
45	17 52 20	130 49 50	56 1 40	67,1	0	67,1	66,3
50	24 10 15	125 7 0	56 16 40	92,2	0	92,2	92,7
55	29 45 45	119 26 20	56 15 50	110,9	0	110,9	110,8
60	34 37 30	113 49 10	55 59 30	126,5	0	126,5	125,6
65	38 47 40	108 17 0	55 28 0	139,3	47,3	92,0	93,1
70	42 20 20	102 50 50	54 41 10	149,3	93,4	55,9	55,1
75	45 19 45	97 31 20	53 38 30	160,2	127,2	33,0	32,7

Hier behalten i , ψ , ψ_1 , ψ_2 , δ_o , δ_e , δ'_o , δ'_e ihre früheren Bedeutungen.

Die berechneten Werte stimmen mit den beobachteten im letzten Falle besser überein, als im früheren Fall, was wahrscheinlich auf die Wirkung einer eventuell vorhandenen Oberflächenschicht zurückzuführen ist. Diese Wirkung muß nämlich besonders im ersten Fall wahrnehmbar sein, da hier die reflektierte Welle bei einem Einfallswinkel von ca. 45° verschwindet.

Aus den Tabellen ist weiter ersichtlich, daß im Falle der ordinären, einfallenden Welle die reflektierte, extraordinäre Welle bei einem Einfallswinkel von zwischen 65° und 70° verschwindet. Das Verschwinden dieser Welle gibt einen Anteil zur Phasenänderung der Totalreflexion, so daß die beobachtete Phasenverschiebung aus zwei Gründen: erstens infolge des Verschwindens der gebrochenen, und zweitens wegen des Verschwindens der reflektierten, extraordinären Welle, entsteht.

Zum Schluß sei es mir gestattet, den Herren Professoren Baron Roland von Eötvös und Isidor Fröhlich meinen besten Dank für ihr gütiges Entgegenkommen, mit welchem sie meine Arbeit gefördert haben, auszusprechen. Ich bin weiter auch Hrn. Prof. Winkler, Direktor des hiesigen ersten chemikalischen Institutes der Universität für seine Liebenswürdigkeit, mit welcher er mir das zu meinen Experimenten benötigte chemisch-reine Ligroin und Toluol zur Verfügung stellte, zu weiterem verbindlichsten Danke verpflichtet.

Budapest, Erstes physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 12. November 1914.)

2. Untersuchungen über die Phasenänderungen des reflektierten Lichtes; von Stephan Rybár.

(Vorgelegt der Ungar. Akad. d. Wissensch. am 27. April 1914.)

§ 1. Einleitung. — § 2. Die Versuchsmethode. — § 3. Verschiedene Fälle der Untersuchung; eine allgemeine Bemerkung. — § 4. Allgemeine Theorie der Versuchsmethode. a) Das Licht bleibt unpolarisiert. b) Der Polarisator befindet sich zwischen dem Fresnelschen Doppelspiegel und dem reflektierenden Prisma. c) Der Polarisator befindet sich zwischen dem Prisma und dem Beobachter. — § 5. Betrachtung über die theoretischen Formeln. — § 6. Experimentelle Bestätigung.

§ 1. Einleitung.

In diesen Annalen¹⁾ habe ich eine Methode beschrieben, mittels welcher die absoluten Phasenänderungen des total reflektierten Lichtes meßbar sind.

Diese Methode bestand darin, daß man zwischen dem total und dem partiell reflektierten Licht Interferenzen erzeugt, und dann die Verschiebung der Interferenzstreifen, welche der Phasenunterschied zwischen dem total und partiell reflektierten Licht hervorruft, abmißt.

In meiner erwähnten Abhandlung teilte ich nur diejenigen Resultate mit, welche sich auf die in der Einfallsebene polarisierten oder senkrecht zur selben polarisierten Lichte beziehen.

Die Methode gestattet uns jedoch noch weitere Untersuchungen anzustellen, da die vorhin erwähnten beiden Fälle nur spezielle Fälle eines allgemeineren Falles sind. Wir können nämlich durch Drehung bzw. Entfernung des Polarisators Verschiebungen herstellen, bei denen die interferierenden Lichtkomponenten im willkürlichen Azimute, gar nicht, oder nur teilweise polarisiert sind.

1) St. Rybár, Ann. d. Phys. 42. p. 1171. 1913. In ungarischer Sprache im M. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Értesítője 32. p. 1—30, 531—564. 1914 erschienen.

Die Verschiebung der Interferenzstreifen hängt in diesen allgemeinen Fällen nicht nur von den absoluten Phasenänderungen, sondern auch noch von den Intensitätsveränderungen ab, die das Licht durch die Reflexionen und Refraktionen erleidet.

Es drängt sich jetzt die Frage auf, was für eine Beziehung zwischen der Verschiebung und diesen Veränderungen besteht, und zwar, wenn das Licht im willkürlichen Azimute polarisiert oder gar nicht polarisiert wird.

Diese Frage, die die allgemeine Theorie der Versuchsmethode gibt, will ich hier beantworten.

§ 2. Die Versuchsmethode.

Die Versuchsmethode habe ich in meiner erwähnten Abhandlung ausführlich beschrieben und will ich sie hier nur ganz kurz erläutern.

Die Linse L (Fig. 1) entwirft das Bild eines vertikalen Nernststiftes S auf dem Spalt R . Das durch den Spalt hindurchgehende Licht wird mit Hilfe des Fresnelschen Doppelspiegels F und der konvexen Zylinderlinse L' in zwei kohärente

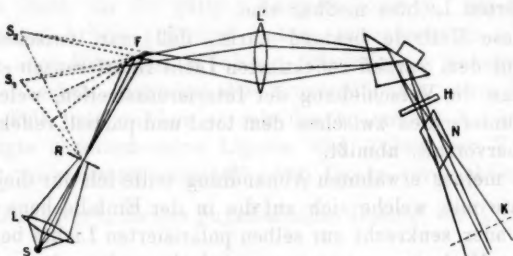


Fig. 1.

Lichtbündel geteilt. Diese werden dann im Innern eines Glasprismas reflektiert. Ein Teil der Hypotenusenfläche des Prismas wurde mit einer in einem würfelförmigen Gefäßchen enthaltenen Flüssigkeit befeuchtet. Das eine Lichtbündel wird an dem nicht befeuchteten Flächenteil reflektiert, ein Teil des anderen Lichtbündels aber erleidet an dem befeuchteten Flächenteil Reflexionen, während ein anderer Teil an dem nicht befeuchteten Flächenteil der Hypotenusenfläche eben-

falls Reflexionen erleidet. Die zwei Lichtbündel werden dann, nachdem sie durch eine Zylinderlinse *H* in genügender Weise konvergent gemacht wurden, interferieren. Es entstehen zwei Interferenzstreifen, die gegeneinander verschoben sind. Das Nikol *N* dient zur Polarisierung des Lichtes.

§ 3. Verschiedene Fälle der Untersuchung; eine allgemeine Bemerkung.

Die Verschiebung der Interferenzstreifen hängt wesentlich vom Umstande ab, ob wir das Licht polarisieren, oder nicht; im Polarisationsfalle jedoch auch davon, wo der Polarisator steht. Diese Polarisierung kann entweder vor der Reflexion an dem Fresnelschen Doppelspiegel, oder zwischen dem Fresnelschen Doppelspiegel und dem reflektierenden Prisma, oder schließlich hinter dem Prisma erfolgen.

Von diesen Fällen führt, wie wir sehen werden, der erste und letzte zum gleichen Resultat, weshalb wir auch bei der Besprechung der allgemeinen Theorie unserer Versuchsmethode drei Fälle unterscheiden müssen. Diese sind:

- a) Wir entfernen das Nikol und polarisieren überhaupt nicht das Licht;
- b) wir polarisieren das Licht bevor es ins Prisma eintritt;
- c) wir polarisieren das Licht nach dessen Austritt aus dem Prisma.

Bevor wir aber unsere Betrachtungen anfangen, müssen wir eine allgemeine Bemerkung vorausschicken.

Es genügt nur einen Blick auf unsere Figur (Fig. 1) zu werfen, um uns sofort zu überzeugen, daß sich das Licht nicht in einer ebenen, sondern in einer komplizierten Wellenfläche fortpflanzt. Wir können demnach unsere Lichtvektoren nicht durch die einfachen Formeln der ebenen Welle ausdrücken, welcher Umstand unsere Betrachtungen äußerst erschweren würde. Jedoch kommen uns die großen Maßstäbe unserer Versuchsanordnung zu Hilfe. Es ist nämlich bekannt, daß: „Wegen der außerordentlichen Kleinheit der Wellenlänge die beobachtbaren Teile“ komplizierter „Wellenflächen stets sehr nahe dasselbe Schwingungsgesetz befolgen, wie Teile ebener Wellen, wenn ihre Krümmungsradien auch nur wenige

Millimeter betragen“.¹⁾ Bei unseren Experimenten sind die Krümmungsradien der Wellenfläche nicht nur einige Millimeter, sondern dort, wo die Beobachtungen erfolgen, auch einige Meter groß, außerdem beschränkt sich die Beobachtung nur auf einen sehr kleinen Teil der Wellenfläche. Es wird also auf die zu beobachtende Erscheinung von nicht wahrnehmbaren Einfluß sein, wenn wir in den folgenden Betrachtungen mit ebenen Wellen arbeiten.

§ 4. Allgemeine Theorie der Versuchsmethode.

a) Das Licht bleibt unpolarisiert.

Fig. 1 stellt unsere gültige Versuchsanordnung dar, wenn wir von der Figur das Nikol N entfernen.

Vor allem drücken wir die Vektoren der interferierenden Lichtkomponenten aus.

Das durch den Spalt R hindurchgehende Licht ist natürliches Licht. Es ist eine wohlbekannte Tatsache, daß in den optischen Wirkungen das natürliche Licht durch elliptisch-polarisiertes Licht ersetzt werden kann, dessen Schwingungszustand dauernd den Stokesschen Sätzen gemäß variiert.

Zwecks unserer weiteren Betrachtungen definieren wir das natürliche Licht durch zwei Vektorkomponenten, von denen der eine *senkrecht* zur gemeinsamen *Einfallsebene* steht, die zu dem Fresnelschen Doppelspiegel, und außerdem zu den im Prisma erfolgenden Reflexionen gehört, während der zweite Vektorkomponent *parallel* zu dieser *Einfallsebene* liegt. Diese sind:

$$\mathfrak{A}_s = A_s e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{s'}{\lambda} + \alpha_s \right)}$$

$$\mathfrak{A}_p = A_p e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{s'}{\lambda} + \alpha_p \right)}$$

Die Amplituden A_s , A_p und die Anfangsphasen α_s , α_p ändern ihre Werte andauernd, und zwar so, daß sie immer die folgenden Bedingungen erfüllen²⁾:

1) W. Voigt, Komp. d. Theor. Phys. 2. p. 756. 1896.

2) G. G. Stokes, Phil. Mag. (4) 3. p. 316. 1852.

$$(1) \quad \begin{cases} A = \sum (A_s^2 - A_p^2) = 0 & \sum A_s^2 = \sum A_p^2 = \frac{J}{2} \\ B = \sum A_s A_p \cos 2\pi(\alpha_s - \alpha_p) = 0 \\ C = \sum A_s A_p \sin 2\pi(\alpha_s - \alpha_p) = 0, \end{cases}$$

wobei das Zeichen \sum den zeitlichen Mittelwert der betreffenden Ausdrücke bedeutet.

Das aus der Spalte heraustretende Licht interferiert nur nach mehrfacher Reflexion und Refraktion. Bei jeder Reflexion und Refraktion werden die Amplituden der senkrechten und parallelen Vektorkomponenten mit einem Faktor multipliziert (mit dem betr. Fresnelschen). Bezeichnen wir die zur Reflexion an dem Fresnelschen Doppelspiegel gehörenden Faktoren mit f_s und f_p , den zu der Brechung an der Linse L' gehörenden, gemeinsamen Faktor mit r , und endlich die zu der Refraktion an der vorderen Kathetenfläche des Prismas mit d_s und d_p , dann können wir die Hauptvektorkomponenten der zwei kohärenten Lichtwellen, bevor die Reflexion an der Hypotenusenfläche des Prismas erfolgt, folgendermaßen darstellen:

$$(2) \quad \begin{cases} (\mathfrak{B}_{s1}) = A_s f_s r d_s e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha_s''}{\lambda} + \alpha_s \right)}, \\ (\mathfrak{B}_{p1}) = A_p f_p r d_p e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha_p''}{\lambda} + \alpha_p \right)}, \\ (\mathfrak{B}_{s2}) = A_s f_s r d_s e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha_s''}{\lambda} + \alpha_s \right)}, \\ (\mathfrak{B}_{p2}) = A_p f_p r d_p e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha_p''}{\lambda} + \alpha_p \right)}. \end{cases}$$

Die mit Index 1 bezeichneten Vektorkomponenten gehören zu der einen Lichtwelle, und die mit Index 2 bezeichneten Komponenten zu der anderen Lichtwelle.

Die beiden Lichtwellen erleiden sodann eine Reflexion an der Hypotenusenfläche des Prismas. Während die mit Index 1 bezeichnete Welle in ihrer ganzen Ausdehnung an der Grenzfläche der Glas-Luft reflektiert wird, wird ein Teil der mit 2 bezeichneten Lichtwelle ebenfalls an der Luftgrenze, ein anderer Teil aber an der Flüssigkeitsgrenze reflektiert.

Diese verschiedenen Teile der reflektierten Wellen werden durch Fig. 2 dargestellt. In der einen Hälfte der Figur, in $afghid$ verbreitet sich die Wellenfläche 1, in der anderen Hälfte, in $adcbef$ aber die Wellenfläche 2. Das im Quadrant $abcd$ sich fortpflanzende Licht wurde an der Grenzfläche der Glas-Flüssigkeit, jenes in den Quadranten $abef$, $fgha$, und $hida$ sich verbreitende aber an der Grenzfläche der Glas-Luft reflektiert.

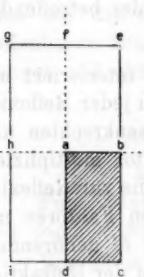


Fig. 2.

Wir bezeichnen die zur Reflexion an der Luftgrenze gehörenden Werte der Fresnelschen Faktoren mit $v_p e^{i\delta}$ und $v_p' e^{i\delta_p}$, jene zur Reflexion an der Flüssigkeitsgrenze gehörenden mit $v_p' e^{i\delta_p'}$ und $v_p e^{i\delta_p'}$.

Das Licht tritt dann aus dem Prisma heraus und geht durch die Zylinderlinse H hindurch. Die Vektorkomponenten des Lichtes werden infolge der ersten Ursache mit d_p' bzw. d_p , infolge der zweiten Ursache jedoch mit dem gemeinsamen Faktor r' multipliziert.

Zwecks Darstellung der Vektorausdrücke unterscheiden wir zwei Gruppen je eines Strahlenbündels.

Die eine Gruppe der aus der Lichtquelle S_2 kommenden Strahlen bilden jene Strahlen, welche an der Luftgrenze reflektiert werden, die andere Gruppe hingegen, bilden die an der Flüssigkeitsgrenze reflektierten Strahlen. Wir bezeichnen die Vektorkomponente der ersten Gruppe mit $(\mathfrak{B}_2)'$ und $(\mathfrak{B}_{p2})'$, die letzteren (der zweiten Gruppe) mit $(\mathfrak{B}_2)''$ und $(\mathfrak{B}_{p2})''$.

Die Strahlen der Lichtquelle S_1 teilen wir ebenfalls in zwei Gruppen, je nachdem sie mit den zu den verschiedenen Gruppen gehörenden Strahlen der Lichtquelle S_2 interferieren. Wir bezeichnen die Vektorkomponenten der Strahlen der ersten Gruppe mit $(\mathfrak{B}_1)'$ und $(\mathfrak{B}_{p1})'$, jene der zweiten Gruppe mit $(\mathfrak{B}_1)''$ und $(\mathfrak{B}_{p1})''$. Die Vektorausdrücke der beiden letzteren Paare sind identisch.

Nach dem vorhin Gesagten können wir diese Vektorkomponenten folgendermaßen ausdrücken:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{B}_s)_1' = A_s f_s r d_s v_s d_s' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1}{\lambda} + \alpha_s \right) + \delta_s \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)_1' = A_p f_p r d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1}{\lambda} + \alpha_p \right) + \delta_p \right]}, \\ (\mathfrak{B}_s)_1'' = A_s f_s r d_s v_s d_s' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1}{\lambda} + \alpha_s \right) + \delta_s \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)_1'' = A_p f_p r d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1}{\lambda} + \alpha_p \right) + \delta_p \right]}, \\ (\mathfrak{B}_s)_2' = A_s f_s r d_s v_s d_s' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_2}{\lambda} + \alpha_s \right) + \delta_s \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)_2' = A_p f_p r d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_2}{\lambda} + \alpha_p \right) + \delta_p \right]}, \\ (\mathfrak{B}_s)_2'' = A_s f_s r d_s v_s d_s' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_2}{\lambda} + \alpha_s \right) + \delta_s \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)_2'' = A_p f_p r d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_2}{\lambda} + \alpha_p \right) + \delta_p \right]}. \end{array} \right.$$

Die mit gleicher Strichzahl und mit demselben Index s oder p bezeichneten Vektoren interferieren untereinander. Wir werden uns in den folgenden Betrachtungen zuerst mit der Interferenz der einmal gestrichenen Wellen, und dann mit jener der zweimal gestrichenen Wellen befassen.

1. Im Sinne der Interferenzgesetze sind die resultierenden Vektorkomponenten der mit ' bezeichneten Wellen

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}_s' = (\mathfrak{B}_s)_1' + (\mathfrak{B}_s)_2' = V_s' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\sigma_s'}{\lambda} + \alpha_s \right) + \delta_s \right]} \\ \mathfrak{B}_p' = (\mathfrak{B}_p)_1' + (\mathfrak{B}_p)_2' = V_p' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\sigma_p'}{\lambda} + \alpha_p \right) + \delta_p \right]} \end{array} \right.,$$

wo

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_s'^2 = 2 (A_s f_s r d_s v_s d_s' r')^2 \left(1 + \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right) \\ V_p'^2 = 2 (A_p f_p r d_p v_p d_p' r')^2 \left(1 + \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right) \end{array} \right.,$$

$$(6) \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{\sigma_s'}{\lambda} = \frac{\sin 2\pi \frac{s_1}{\lambda} + \sin 2\pi \frac{s_2}{\lambda}}{\cos 2\pi \frac{s_1}{\lambda} + \cos 2\pi \frac{s_2}{\lambda}} = \operatorname{tg} 2\pi \frac{\sigma_p'}{\lambda}.$$

Die resultierende Intensität ist:

$$J' = \Sigma(V_s'^2 + V_p'^2) = 2[f_s' r d_s v_s d_s' r']^2 \left[1 + \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right] \Sigma A_s'^2 \\ + 2[f_p' r d_p v_p d_p' r']^2 \left[1 + \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right] \Sigma A_p'^2,$$

die sich bei Heranziehung der Bedingung (1) auch schreiben läßt:

$$J = J(f_s'^2 r^2 d_s^2 v_s^2 d_s'^2 r'^2 + f_p'^2 r^2 d_p^2 v_p^2 d_p'^2 r'^2) \left(1 + \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right).$$

Das *Maximum* von J' ist gleich $2 J r^2 r'^2 (f_s'^2 d_s^2 d_s'^2 v_s^2 + f_p'^2 d_p^2 d_p'^2 v_p^2)$, das *Minimum* ist aber gleich 0; demgemäß bestehen die Interferenzstreifen aus *hellen* und *ganz dunklen* Streifen.

Das Maximum der Intensität wird erreicht, wenn

$$(7) \quad \begin{cases} 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = 0, & \pm 2\pi, & \pm 4\pi, & \text{usw.,} \\ \text{das Minimum, wenn} \\ 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \pm \pi & \pm 3\pi, & \pm 5\pi, & \text{usw.} \end{cases}$$

ist.

Diese Werte bestimmen die Lage der Streifen des einen, mit ' bezeichneten Interferenzsystems.

2. Auf ähnliche Weise bestimmen wir die beiden Vektorkomponenten, welche aus den mit '' bezeichneten Wellen resultieren. Diese sind:

$$(8) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}_s'' = (\mathfrak{B}_s)_1'' + (\mathfrak{B}_s)_2'' = V_s'' e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{\sigma_s''}{\lambda} + \alpha_s \right)} \\ \mathfrak{B}_p'' = (\mathfrak{B}_p)_1'' + (\mathfrak{B}_p)_2'' = V_p'' e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{\sigma_p''}{\lambda} + \alpha_p \right)} \end{cases}$$

wobei

$$(9) \quad \begin{cases} V_s''^2 = (A_s f_s' r d_s d_s' r')^2 \left[v_s^2 + v_s'^2 \right. \\ \quad \left. + 2 v_s v_s' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_s' - \delta_s \right) \right] \\ V_p''^2 = (A_p f_p' r d_p d_p' r')^2 \left[v_p^2 + v_p'^2 \right. \\ \quad \left. + 2 v_p v_p' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_p' - \delta_p \right) \right] \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} 2\pi \frac{\sigma_s''}{\lambda} = \frac{v_s \sin \left(2\pi \frac{s_1}{\lambda} - \delta_s \right) + v_s' \sin \left(2\pi \frac{s_2}{\lambda} - \delta_s' \right)}{v_s \cos \left(2\pi \frac{s_1}{\lambda} - \delta_s \right) + v_s' \cos \left(2\pi \frac{s_2}{\lambda} - \delta_s' \right)} \\ \operatorname{tg} 2\pi \frac{\sigma_p''}{\lambda} = \frac{v_p \sin \left(2\pi \frac{s_1}{\lambda} - \delta_p \right) + v_p' \sin \left(2\pi \frac{s_2}{\lambda} - \delta_p' \right)}{v_p \cos \left(2\pi \frac{s_1}{\lambda} - \delta_p \right) + v_p' \cos \left(2\pi \frac{s_2}{\lambda} - \delta_p' \right)} \end{cases}$$

Und so ist die Intensität des resultierenden Lichtes:

$$\begin{aligned} J'' = \Sigma (V_s''^2 + V_p''^2) &= \frac{J}{2} f_s^2 r^2 d_s'^2 d_p'^2 r'^2 \left[v_s^2 + v_s'^2 \right. \\ &\quad \left. + 2v_s v_s' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_s' - \delta_s \right) \right] \\ &\quad + \frac{J}{2} f_p^2 r^2 d_p'^2 d_s'^2 r'^2 \left[v_p^2 + v_p'^2 \right. \\ &\quad \left. + 2v_p v_p' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_p' - \delta_p \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Intensität nimmt ihre extremen Werte bei

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \arctg \frac{\sin(\delta_s - \delta_s') + \frac{f_p^2 d_p'^2 d_p'^2 v_p v_p'}{f_s^2 d_s'^2 d_s'^2 v_s v_s'} \sin(\delta_p - \delta_p')}{\cos(\delta_s - \delta_s') + \frac{f_p^2 d_p'^2 d_p'^2 v_p v_p'}{f_s^2 d_s'^2 d_s'^2 v_s v_s'} \cos(\delta_p - \delta_p')} = \xi \pm k\pi$$

auf.

Wenn wir jetzt annehmen, daß wir das Vorzeichen der zur Reflexion gehörenden Fresnelschen Faktoren in den Phasenänderungen (δ_s , δ_p , δ_s' , δ_p') ausdrücken, so daß v_s , v_p , v_s' , v_p' nur positive Größen sein können, dann ist J'' Maximum, wenn

$$(11) \quad \begin{cases} 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \xi & \xi \pm 2\pi & \xi \pm 4\pi \text{ usw.} \\ \text{und Minimum, wenn} \\ 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \xi \pm \pi & \xi \pm 3\pi & \xi \pm 5\pi \text{ usw.} \end{cases}$$

ist.

Im Ausdruck J'' ist

das Minimum des ersten Koeffizienten ($v_s - v_s'$)²
 „ „ „ zweiten „ ($v_p - v_p'$)²
 „ Maximum „ ersten „ ($v_s + v_s'$)²
 „ „ „ zweiten „ ($v_p + v_p'$)²

Demzufolge kann J'' nicht kleiner sein als

$$\frac{J}{2} r^2 r'^2 [f_s^2 d_s^2 d_s'^2 (v_s - v_s')^2 + f_p^2 d_p^2 d_p'^2 (v_p - v_p')^2]$$

und nicht größer, als

$$\frac{J}{2} r^2 r'^2 [f_s^2 d_s^2 d_s'^2 (v_s + v_s')^2 + f_p^2 d_p^2 d_p'^2 (v_p + v_p')^2].$$

J'' kann demnach niemals verschwinden, insofgedessen sind die Minima des mit " bezeichneten Interferenzsystems nicht ganz dunkle Streifen.

Bestimmen wir nun die extremen Werte von J'' .

J'' besteht aus einem konstanten und aus einem veränderlichen Teil. Wenn wir der Kürze halber die Bezeichnungen

$$J r^2 r'^2 f_s^2 d_s^2 d_s'^2 v_s v_s' = K_s$$

$$J r^2 r'^2 f_p^2 d_p^2 d_p'^2 v_p v_p' = K_p$$

$$\delta_s - \delta_s' = x_s$$

$$\delta_p - \delta_p' = x_p \quad 1)$$

eingeführen, dann ist der veränderliche Teil von J''

$$K_s \cos (x - x_s) + K_p \cos (x - x_p).$$

Diese Größe nimmt die extremen Werte an, wenn

$$x_0'' = \arctg \frac{K_s \sin x_s + K_p \sin x_p}{K_s \cos x_s + K_p \cos x_p}$$

ist.

Demnach sind die extremen Werte des veränderlichen Teiles von J''

$$\cos x_0'' (K_s \cos x_s + K_p \cos x_p) + \sin x_0'' (K_s \sin x_s + K_p \sin x_p),$$

welcher durch die Substitution von

$$\cos x_0'' = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x_0''}} = \frac{K_s \cos x_s + K_p \cos x_p}{\sqrt{K_s^2 + K_p^2 + 2 K_s K_p \cos (x_p - x_s)}}$$

$$\sin x_0'' = \frac{\operatorname{tg} x_0''}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x_0''}} = \frac{K_s \sin x_s + K_p \sin x_p}{\sqrt{K_s^2 + K_p^2 + 2 K_s K_p \cos (x_p - x_s)}}$$

in der Form

$$\sqrt{K_s^2 + K_p^2 + 2 K_s K_p \cos (x_p - x_s)}$$

dargestellt werden kann.

1) Die Buchstaben x_s und x_p haben dieselbe Bedeutung, wie in meiner vorhergehenden Abhandlung Ann. d. Phys. 42, p. 1189. 1913.

Demgemäß ist das Maximum des veränderlichen Teiles von J''

$$+ \sqrt{K_s^2 + K_p^2 + 2 K_s K_p \cos(x_p - x_s)}$$

das Minimum desselben

$$- \sqrt{K_s^2 + K_p^2 + 2 K_s K_p \cos(x_p - x_s)}.$$

Die beiden Interferenzsysteme, die im Gesichtsfeld des Okularmikrometers entstehen, sind nunmehr bekannt. Die Streifen des ersten Systems (die hellen und die ganz dunklen Streifen) liegen bei den unter (7) angegebenen Werten von $2\pi[(s_1 - s_2)/\lambda]$, die Streifen des zweiten Systems hingegen (die hellen und die weniger hellen Stellen), liegen bei den unter (11) angeführten Werten von $2\pi[(s_1 - s_2)/\lambda]$. Das mit " bezeichnete Streifensystem können wir deshalb so auffassen, als ob es aus dem mit ' bezeichneten Interferenzsystem durch Verschiebung von

$$(12^*) \quad \xi = \arctg \frac{\sin(\delta_s - \delta_s') + q \sin(\delta_p - \delta_p')}{\cos(\delta_s - \delta_s') + q \cos(\delta_p - \delta_p')}$$

in senkrechter Richtung zu den Interferenzstreifen entstanden wäre. In diesem Ausdruck ist

$$(12) \quad q = \frac{f_p^2 d_p^2 d_p'^2 v_p v_p'}{f_s^2 d_s^2 d_s'^2 v_s v_s'}.$$

Dies ist die Beziehung zwischen der Verschiebung der Interferenzstreifen und den absoluten Phasenänderungen des reflektierten Lichtes.

Zum Schluß wollen wir den Polarisationszustand der Wellen besprechen.

Die Stokesschen Bedingungen sind die notwendigen und genügenden Bedingungen des natürlichen Lichtes. Wird nur eine der Bedingungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ nicht erfüllt, dann ist das Licht schon kein natürliches, sondern ein Gemisch von natürlichem und polarisiertem Lichte. Die Parameter dieses polarisierten Anteiles können wir leicht mit Hilfe der bekannten Stokesschen Bestimmungsformeln¹⁾ berechnen.

1) M. E. Mascart, *Traité d'optique* I. p. 547. 1889; W. Voigt, *Komp. d. theor. Phys.* II. p. 551. 1896.

Ich zitiere hier nur die Endresultate:

Um festzustellen, durch welche Beimengung sich die durch die Vektoren

$$\mathfrak{B}_x = V_x e^{i(\varphi - \alpha_x)}$$

$$\mathfrak{B}_y = V_y e^{i(\varphi - \alpha_y)}$$

dargestellte Schwingung vom natürlichen Lichte unterscheidet, bilden wir zuerst die Größen

$$(13) \quad \begin{cases} A = \Sigma(V_x^2 - V_y^2) \\ B = \Sigma V_x V_y \cos(\alpha_x - \alpha_y) \\ C = \Sigma V_x V_y \sin(\alpha_x - \alpha_y). \end{cases}$$

Wenn keine dieser Größen verschwindet, dann ist das natürliche Licht mit elliptisch polarisiertem Licht gemischt.

Die Winkel, μ_1 und μ_2 , die die Hauptachsen der Ellipse mit der x -Achse bildet, werden aus der Gleichung:

$$(14) \quad \operatorname{tg} 2\mu = \frac{2B}{A},$$

das Achsenverhältnis $(a_y/a_x) = \operatorname{tg} \nu$ der Ellipse hingegen aus der Gleichung

$$(15) \quad \sin 2\nu = \pm \frac{2C}{\sqrt{A^2 + 4(B^2 + C^2)}}$$

berechnet, und die Rotationsrichtung der Ellipse wird durch das Vorzeichen der Flächengeschwindigkeit

$$(16) \quad \Omega = -\frac{\pi}{T} C$$

dermaßen ausgedrückt, daß das positive Vorzeichen von Ω eine Rotationsrichtung von $+x$ nach $+y$ bedeutet.

Zwecks Bestimmung der Polarisierung des interferierenden Lichtes und der Bestimmung der Polarisierung des resultierenden Lichtes, bilden wir die Mittelwerte A , B , C mit Hilfe der unter (3), bzw. (4) und (8) angeführten beiden Vektoren. Die Konstitution der Vektoren aller angeführten Schwingungen ist eine derartige, daß die Amplituden der senkrechten Vektorkomponenten in der Form $A_s g_s$, deren Phasen durch $2\pi\alpha_s + \Delta_s$, die Amplituden der parallelen Vektorkomponenten durch $A_p g_p$, deren Phasen jedoch durch $2\pi\alpha_p + \Delta_p$, ausgedrückt werden können. Die Größen g_s , g_p , Δ_s , Δ_p sind bei den einzelnen Wellen verschieden.

Die gesuchten Mittelwerte sind demnach:

$$\begin{aligned} A &= g_s^2 \sum A_s^2 - g_p^2 \sum A_p^2 = (g_s^2 - g_p^2) \frac{J}{2}, \\ B &= g_s g_p \sum A_s A_p \cos [2\pi(\alpha_s - \alpha_p) + \Delta_s - \Delta_p] \\ &= g_s g_p \cos(\Delta_s - \Delta_p) \sum A_s A_p \cos 2\pi(\alpha_s - \alpha_p) \\ &\quad - g_s g_p \sin(\Delta_s - \Delta_p) \sum A_s A_p \sin 2\pi(\alpha_s - \alpha_p), \\ C &= g_s g_p \sum A_s A_p \sin [2\pi(\alpha_s - \alpha_p) + \Delta_s - \Delta_p] \\ &= g_s g_p \cos(\Delta_s - \Delta_p) \sum A_s A_p \sin 2\pi(\alpha_s - \alpha_p) \\ &\quad + g_s g_p \sin(\Delta_s - \Delta_p) \sum A_s A_p \cos 2\pi(\alpha_s - \alpha_p). \end{aligned}$$

Da jedoch $g_s \neq g_p$, ferner da die unter (1) angeführten Bedingungen gültig sind, so entspricht jede der erwähnten Schwingungen den Bedingungen von

$$A \neq 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Deswegen können die aus dem Prisma heraustretenden, später interferierenden Wellen, sowie auch deren resultierende Wellen in ihrer optischen Wirkung durch ein Gemisch von natürlichem und in Ebene polarisiertem Lichte ersetzt werden.

b) Der Polarisator befindet sich zwischen dem Fresnelschen Doppelspiegel und dem reflektierenden Prisma.

Unsere Versuchseinrichtung stellt Fig. 1 dar, mit jener Abänderung jedoch, daß das Nikol zwischen der Linse L' und dem Prisma ist.

Bezeichnen wir das Polarisationsazimuth des aus dem Nikol heraustretenden Lichtes, d. h. den Winkel, welchen der Lichtvektor mit der Einfallsebene bildet, mit φ , dann können wir die Vektorkomponenten der beiden kohärenten Schwingungen, bevor die Reflexion im Prisma erfolgt, folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{cases} (\mathfrak{B})_1 = C \sin \varphi d_s e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1''}{\lambda} + c \right)} \\ (\mathfrak{B})_1 = C \cos \varphi d_p e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1''}{\lambda} + c \right)} \\ (\mathfrak{B})_2 = C \sin \varphi d_s e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{s_2''}{\lambda} + c \right)} \\ (\mathfrak{B})_2 = C \cos \varphi d_p e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{s_2''}{\lambda} + c \right)} \end{cases}$$

wobei C und c nur von φ abhängen können, während d_s und d_p ihre frühere Bedeutung beibehalten.

Diese Vektoren treten an Stelle der unter (2) angeführten Vektoren. In jeder anderen Hinsicht jedoch bleiben unsere früheren Betrachtungen unverändert gültig, so daß wir die Vektoren der interferierenden Schwingungen direkt aus den unter (3) angeführten Ausdrücken gewinnen, wenn wir

$A_s = C \sin \varphi$, $A_p = C \cos \varphi$, $f_s = f_p = r = 1$, $\alpha_s = \alpha_p = c$ setzen. Diese sind:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{B}_s)_1' = C \sin \varphi d_s v_s d_s' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1}{\lambda} + c \right) + \delta_s \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)_1' = C \cos \varphi d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1}{\lambda} + c \right) + \delta_p \right]} \\ (\mathfrak{B}_s)_1'' = C \sin \varphi d_s v_s d_s' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1}{\lambda} + c \right) + \delta_s \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)_1'' = C \cos \varphi d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1}{\lambda} + c \right) + \delta_p \right]} \\ (\mathfrak{B}_s)_2' = C \sin \varphi d_s v_s d_s' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_2}{\lambda} + c \right) + \delta_s \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)_2' = C \cos \varphi d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_2}{\lambda} + c \right) + \delta_p \right]} \\ (\mathfrak{B}_s)_2'' = C \sin \varphi d_s v_s d_s' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_2}{\lambda} + c \right) + \delta_s \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)_2'' = C \cos \varphi d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_2}{\lambda} + c \right) + \delta_p \right]} \end{array} \right.$$

1. Die Interferenz der mit ' bezeichneten Schwingungen können wir leicht ermitteln.

Bei diesen Schwingungen ist nämlich die Phasendifferenz der senkrechten Vektorkomponenten dieselbe, wie jene der parallelen Vektorkomponenten, und zwar stimmt diese Differenz mit der im Falle a) 1. ermittelten überein. Deshalb befinden sich die extremen Werte der Intensität genau an derselben Stelle, wo wir sie im erwähnten Falle fanden. Demnach ist die Intensität Maximum, wenn

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = 0, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 4\pi \text{ usw.}$$

und Minimum, wenn

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \pm \pi, \quad \pm 3\pi, \quad \pm 5\pi \text{ usw. ist.}$$

Das Maximum der Intensität ist $4Cr'^2(d_s'^2 d_p'^2 v_s'^2 \sin^2 \varphi + d_p'^2 d_p'^2 v_p'^2 \cos^2 \varphi)$, das Minimum hingegen 0, d. h. das Interferenzsystem besteht aus hellen und ganz dunklen Streifen.

2. Die Interferenz der mit " bezeichneten Schwingungen können wir nicht auf so einfache Weise ermitteln.

Die resultierenden Vektorkomponenten dieser Schwingungen sind:

$$\mathfrak{B}_s'' = (\mathfrak{B}_{s1})'' + (\mathfrak{B}_{s2})'' = V_s'' e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{\sigma_s''}{\lambda} + c \right)}$$

$$\mathfrak{B}_p'' = (\mathfrak{B}_{p1})'' + (\mathfrak{B}_{p2})'' = V_p'' e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{\sigma_p''}{\lambda} + c \right)},$$

wo

$$V_s''^2 = (C \sin \varphi d_s d_s' r')^2 [v_s'^2 + v_s'^2 + 2v_s v_s' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_s' - \delta_s \right)]$$

$$V_p''^2 = (C \cos \varphi d_p d_p' r')^2 [v_p'^2 + v_p'^2 + 2v_p v_p' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_p' - \delta_p \right)]$$

und σ_s'', σ_p'' bedeuten jene Werte, welche durch die unter (10) angeführten Gleichungen bestimmt werden.

Die Intensität des resultierenden Lichtes

$$J'' = V_s''^2 + V_p''^2$$

nimmt dort ihre extremen Werte auf, wo $x = 2\pi [(s_1 - s_2)/\lambda]$ der Gleichung

$$d_s'^2 d_s'^2 v_s v_s' \sin^2 \varphi \sin(x_0'' + \delta_s' - \delta_s) + d_p'^2 d_p'^2 v_p v_p' \cos^2 \varphi \sin(x_0'' + \delta_p' - \delta_p) = 0$$

entspricht, d. h. bei

$$x_0'' = \arctg \frac{\sin(\delta_s - \delta_s') + \frac{d_p'^2 d_p'^2 v_p v_p' \cos^2 \varphi}{d_s'^2 d_s'^2 v_s v_s' \sin^2 \varphi} \sin(\delta_p - \delta_p')}{\cos(\delta_s - \delta_s') + \frac{d_p'^2 d_p'^2 v_p v_p' \cos^2 \varphi}{d_s'^2 d_s'^2 v_s v_s' \sin^2 \varphi} \cos(\delta_p - \delta_p')} = \xi_\varphi \pm k\pi.$$

Demnach ist J'' Maximum bei den Werten

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \xi_\varphi, \quad \xi_\varphi \pm 2\pi, \quad \xi_\varphi \pm 4\pi \text{ usw.}$$

und Minimum bei den Werten

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \xi_\varphi \pm \pi, \quad \xi_\varphi \pm 3\pi, \quad \xi_\varphi \pm 5\pi \text{ usw.}$$

Die Konstitution der Intensität des resultierenden Lichtes (J'') ist, abgesehen von den konstanten Faktoren ganz dieselbe, wie sie im Falle a) war. Deshalb ist sofort ersichtlich, daß die Minima des Interferenzsystems auch hier *nicht ganz dunkle* Streifen sind, ferner daß das Maximum des veränderlichen Teiles von J''

$$+ \sqrt{C_s^2 + C_p^2 + 2C_s C_p \cos(x_p - x_s)}$$

ist, und dessen Minimum

$$- \sqrt{C_s^2 + C_p^2 + 2C_s C_p \cos(x_p - x_s)}$$

ist, wenn x_s und x_p seine frühere Bedeutung beibehält, und

$$C_s = 2Cr'^2 d_s'^2 v_s v_s' \sin^2 \varphi$$

$$C_p = 2Cr'^2 d_p'^2 v_p v_p' \cos^2 \varphi$$

sind.

Aus dem Vorhergehenden geht hervor, daß die die Verschiebung der Interferenzstreifen bestimmende allgemeine Formel wieder

$$(18^*) \quad \xi_\varphi = \arctg \frac{\sin(\delta_s - \delta_s') + \varrho \sin(\delta_p - \delta_p')}{\cos(\delta_s - \delta_s') + \varrho \cos(\delta_p - \delta_p')}$$

ist, in der jedoch ϱ folgende Bedeutung hat:

$$(18) \quad \varrho = \frac{d_p'^2 d_p'^2 v_p v_p'}{d_s'^2 d_s'^2 v_s v_s'} \cotg^2 \varphi.$$

Auf Grund der Vektoren (17) können wir leicht ersehen, daß alle vier, aus dem Prisma heraustretenden, *später interferierenden* Schwingungen *linear* polarisiert sind, wenn die Reflexion an der Hypothenusenfläche des Prismas eine *partielle* ist; ist dagegen die Reflexion eine *totale*, so sind sie *elliptisch* polarisiert. Dasselbe gilt auch hinsichtlich der *resultierenden* Schwingung der mit ' bezeichneten Schwingungen.

Die *Resultante* der mit " bezeichneten Schwingungen *weicht* hinsichtlich der Polarisation von den vorhergehenden Schwingungen *wesentlich ab*; die Polarisation derselben ist nämlich nicht nur bei jedem Einfallswinkel *im allgemeinen elliptisch* polarisiert, sondern sein Polarisationszustand ist *an verschiedenen Stellen* im Streifenintervall zwischen den benachbarten Maxima *verschieden*.

Mit Hilfe der Formeln (10) können wir nämlich leicht beweisen, daß die Phasendifferenz der Komponenten s und p des Resultanten der mit " bezeichneten Schwingungen

$$2\pi \frac{\sigma_s'' - \sigma_p''}{\lambda} = \arctg \frac{v_s v_p \sin(\delta_p - \delta_s) + v_s v_p' \sin(x + \delta_p' - \delta_s) + v_s' v_p \sin(-x + \delta_p - \delta_s') + v_s' v_p' \sin(\delta_p' - \delta_s')}{v_s v_p \cos(\delta_p - \delta_s) + v_s v_p' \cos(x + \delta_p' - \delta_s) + v_s' v_p \cos(-x + \delta_p - \delta_s') + v_s' v_p' \cos(\delta_p' - \delta_s')}$$

ist, welche, wie ersichtlich, auch von den Werten $x = 2\pi[(s_1 - s_2)/\lambda]$ abhängt.

Auf Grund des Vorhergehenden können wir uns nun auch davon leicht überzeugen, daß wenn wir das Licht nicht zwischen dem Fresnelschen Doppelspiegel und dem Prisma, sondern vor dem Fresnelschen Spiegel polarisiert hätten, der Wert von φ folgender wäre:

$$(19) \quad \varphi = \frac{f_p^2 d_p^2 d_p'^2 v_s v_p'}{f_s^2 d_s^2 d_s'^2 v_s v_s'} \cotg^2 \varphi.$$

Bezüglich der Polarisation der interferierenden und ihrer resultierenden Schwingungen ist obig Gesagtes maßgebend.

- c) Der Polarisator befindet sich zwischen dem Prisma und dem Beobachter.

Fig. 1 stellt unsere experimentelle Anordnung dar.

Dieser Fall unterscheidet sich von dem Fall a) nur dadurch, daß die mit den Vektoren (3) definierten Schwingungen auch durch einen Analysator hindurchgehen.

Wir können also leicht die Vektoren der interferierenden Schwingungen berechnen.

Es ist nämlich bekannt, daß wir den Vektor des aus dem Nikol heraustretenden Lichtes gewinnen, wenn wir den Vektor des im Nikol eintretenden Lichtes auf die durch die kürzere Diagonale gelegte Ebene projektieren, und wir diese Projektion mit einer Zahl v , die kleiner als die Einheit ist, multiplizieren.

Die Vektorkomponenten des ins Nikol eintretenden Lichtes sind unter (3) zusammengestellt. Diese Vektoren müssen wir auf die erwähnte Ebene projektieren, welche mit der Horizontalebene einen ω -Winkel bildet. Demnach sind die Vektoren, wenn $(\mathfrak{B}_s)_\alpha$, $(\mathfrak{B}_s)_\alpha i$, $\alpha = 1, 2$ die Bedeutung (3) haben:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{B}_\omega)_1' &= \nu [(\mathfrak{B}_s)_1' \sin \omega + (\mathfrak{B}_p)_1' \cos \omega] \\ (\mathfrak{B}_\omega)_1'' &= \nu [(\mathfrak{B}_s)_1'' \sin \omega + (\mathfrak{B}_p)_1'' \cos \omega] \\ (\mathfrak{B}_\omega)_2' &= \nu [(\mathfrak{B}_s)_2' \sin \omega + (\mathfrak{B}_p)_2' \cos \omega] \\ (\mathfrak{B}_\omega)_2'' &= \nu [(\mathfrak{B}_s)_2'' \sin \omega + (\mathfrak{B}_p)_2'' \cos \omega].\end{aligned}$$

Der resultierende Vektor der mit ' bezeichneten Schwingungen ist:

$$\mathfrak{B}_\omega' = \nu [(\mathfrak{B}_s)_1' + (\mathfrak{B}_s)_2'] \sin \omega + [(\mathfrak{B}_p)_1' + (\mathfrak{B}_p)_2'] \cos \omega$$

und jener, der mit '' bezeichneten Schwingungen

$$\mathfrak{B}_\omega'' = \nu [(\mathfrak{B}_s)_1'' + (\mathfrak{B}_s)_2''] \sin \omega + [(\mathfrak{B}_p)_1'' + (\mathfrak{B}_p)_2''] \cos \omega.$$

Durch Substitution der Werte (4) bzw. (8) erreichen wir, daß

$$\mathfrak{B}_\omega' = \nu \mathfrak{B}_s' \sin \omega + \nu \mathfrak{B}_p' \cos \omega = \nu V_\omega' e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \mu' \right)}$$

$$\mathfrak{B}_\omega'' = \nu \mathfrak{B}_s'' \sin \omega + \nu \mathfrak{B}_p'' \cos \omega = \nu V_\omega'' e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \mu'' \right)}$$

ist, wobei

$$\begin{aligned}V_\omega'^2 &= V_s'^2 \sin^2 \omega + V_p'^2 \cos^2 \omega \\ &\quad + 2 V_s' V_p' \sin \omega \cos \omega \cos \left[2\pi \left(\frac{\sigma_p' - \sigma_s'}{\lambda} + \alpha_s - \alpha_p \right) + \delta_s - \delta_p \right] \\ V_\omega''^2 &= V_s''^2 \sin^2 \omega + V_p''^2 \cos^2 \omega \\ &\quad + 2 V_s'' V_p'' \sin \omega \cos \omega \cos 2\pi \left(\frac{\sigma_p'' - \sigma_s''}{\lambda} + \alpha_s - \alpha_p \right)\end{aligned}$$

bedeuten.

Substituieren wir weiter in diesen Ausdrücken der Amplituden die Werte (5) bzw. (9), und berücksichtigen wir die Stokesschen Bedingungen (1), dann ist leicht zu ersehen, daß die Intensität der mit ' bezeichneten Schwingung:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} J_\omega' &= \Sigma V_\omega'^2 = J \left(1 + \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right) \\ &\quad r^2 r'^2 [f_s'^2 d_s'^2 v_s'^2 d_s'^2 \sin^2 \omega + f_p'^2 d_p'^2 v_p'^2 d_p'^2 \cos^2 \omega] \end{aligned} \right.$$

ist und die Intensität der mit '' bezeichneten Schwingung

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} J_\omega'' &= \Sigma V_\omega''^2 = \frac{J}{2} r^2 r'^2 \left\{ f_s''^2 d_s''^2 v_s''^2 \sin^2 \omega \left[v_s'^2 + v_s''^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 v_s v_s' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_s' - \delta_s \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + f_p''^2 d_p''^2 v_p''^2 \cos^2 \omega \left[v_p'^2 + v_p''^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 v_p v_p' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_p' - \delta_p \right) \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

ist.

Deshalb ist bei konstantem ω J_{ω}' Maximum, wenn

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = 0, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 4\pi \quad \text{usw.}$$

und Minimum, wenn

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \pm \pi, \quad \pm 3\pi, \quad \pm 5\pi \quad \text{usw.}$$

ist.

Dagegen nimmt J_{ω}'' ihre Maximalwerte auf, wenn

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \xi_{\omega}, \quad \xi_{\omega} \pm 2\pi \quad \text{usw.}$$

und ihre Minimalwerte, wenn

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \xi_{\omega} \pm \pi, \quad \xi_{\omega} \pm 3\pi \quad \text{usw.}$$

ist, wobei ξ_{ω} folgende Funktion bedeutet:

$$\xi_{\omega} = \arctg \frac{\sin(\delta_s - \delta_s') + \varrho \sin(\delta_p - \delta_p')}{\cos(\delta_s - \delta_s') + \varrho \cos(\delta_p - \delta_p')}$$

und

$$(22) \quad \varrho = \frac{f_p^2 d_p^2 d_p'^2 v_p v_p'}{f_s^2 d_s^2 d_s'^2 v_s v_s'} \cotg^2 \omega$$

ist.

Demnach ist die Verschiebung der Interferenzstreifen vollkommen identisch mit jener, welche dann eintritt, wenn wir das Licht vor dem Fresnelschen Doppelspiegel im ω Azimut polarisieren.

Aus der Gleichung (20) geht hervor, daß bei konstantem ω das Maximum von J_{ω}'

$$(23) \quad 2Jr^2r'^2(f_s^2 d_s^2 d_s'^2 v_s^2 \sin^2 \omega + f_p^2 d_p^2 d_p'^2 v_p^2 \cos^2 \omega)$$

ist, hingegen dessen Minimum gleich 0 ist, das heißt, das Interferenzsystem der mit ' bezeichneten Schwingungen besteht aus hellen und ganz dunklen Streifen.

Aus Gleichung (21) geht in analoger Weise hervor, daß bei konstantem ω das Maximum des veränderlichen Teiles von J_{ω}'' gemäß den auf p. 336 angestellten Betrachtungen

$$+ \sqrt{G_s^2 + G_p^2 + 2G_s G_p \cos(x_p - x_s)}$$

ist, und das Minimum davon

$$- \sqrt{G_s^2 + G_p^2 + 2G_s G_p \cos(x - x)},$$

wobei

$$G_m = Jr^2 r'^2 f_s^2 d_s^2 d'_s{}^2 v_s v'_s \sin^2 \omega;$$

$$G_p = Jr^2 r'^2 f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 v_p v'_p \cos^2 \omega,$$

bedeuten.

Demnach sind die *Maxima* des Interferenzsystems der mit " bezeichneten Schwingungen *hell*, aber die *Minima* derselben *nicht ganz dunkel*.

Sowohl die interferierenden als auch die resultierenden Schwingungen sind in derselben Ebene, nämlich in der Polarisationsebene des Nikols, polarisiert.

§ 5. Betrachtung über die theoretischen Formeln.

Aus unseren vorhergehenden Resultaten geht hervor, daß die Funktion (12*)

$$(24) \quad x = \arctg \frac{\sin(\delta_s - \delta'_s) + \varrho \sin(\delta_p - \delta'_p)}{\cos(\delta_s - \delta'_s) + \varrho \cos(\delta_p - \delta'_p)}$$

in jedem Falle die Verschiebung der Interferenzstreifen ausdrückt, gleichviel ob wir das Licht polarisieren oder nicht, wobei aber zu bemerken ist, daß der Wert von ϱ bei ein und demselben Einfallswinkel je nach dem Polarisationszustand des Lichtes, verschieden ist.

Wenn wir also in unserer Experimentalanordnung alles unverändert beibehalten und nur das polarisierende Nicol an verschiedenen Stellen anbringen, oder dasselbe gänzlich entfernen, dann wird sich die Verschiebung der Streifen nur insofern verändern, als sich der Wert von ϱ ebenfalls je nach Veränderung der Ortslage des Nikols verändert. ϱ kann drei verschiedene Werte annehmen, und zwar

a) Wenn das Licht nicht polarisiert wird, so ist:

$$(12) \quad \varrho = \frac{f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 v_p v'_p}{f_s^2 d_s^2 d'_s{}^2 v_s v'_s};$$

b) wenn das Licht zwischen dem Fresnelschen Doppelspiegel und dem Prisma im Azimut ω polarisiert wird, so ist

$$(18) \quad \varrho = \frac{d_p^2 d_p'^2 v_p v_p'}{d_s^2 d_s'^2 v_s v_s'} \cotg^2 \omega$$

und schließlich, wenn das Licht wo immer, nur nicht zwischen dem Fresnelschen Doppelspiegel und dem Prisma polarisiert wird, so ist

$$(19) \text{ bzw. } (22) \quad \varrho = \frac{f_p^2 d_p^2 d_p'^2 v_p v_p'}{f_s^2 d_s^2 d_s'^2 v_s v_s'} \cotg^2 \omega.$$

Bezeichnen wir die zum Azimut $\omega = 0^\circ$ gehörende Verschiebung mit x_p , und in analoger Weise die zum Azimut $\omega = 90^\circ$ gehörende Verschiebung mit x_s , dann wird die Verschiebung (24) durch die Formel

$$x = \arctg \frac{\sin x_s + \varrho \sin x_p}{\cos x_s + \varrho \cos x_p}$$

ausgedrückt, wobei für x nur der zwischen x_s und x_p fallende Wert in Betracht kommt.

In meiner zitierten Arbeit habe ich die Werte von x_p und x_s bestimmt und die Abhängigkeit dieser Werte von dem Einfallswinkel durch Kurven dargestellt.

Die Werte von x_s und x_p sind folgende (Ann. d. Phys. 42. p. 1191—1192. 1913):

1. Wenn die Flüssigkeit optisch dünner als das Glas ist, dann ist:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{im Intervalle } 0 \leq i \leq P, & x_p = 0, & x_s = 0, \\ \text{,, , , } P \leq i \leq \Phi, & x_p = +\pi, & x_s = 0, \\ \text{,, , , } \Phi \leq i \leq P', & x_p = \pi + \vartheta_p, & x_s = \vartheta_s, \\ \text{,, , , } P' \leq i \leq \Phi', & x_p = \vartheta_p, & x_s = \vartheta_s, \\ \text{,, , , } \Phi' \leq i \leq (\pi/2), & x_p = \vartheta_p - \vartheta_p', & x_s = \vartheta_s - \vartheta_s'. \end{array} \right.$$

2. Wenn dagegen die Flüssigkeit dichter als das Glas ist, dann ist

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{im Intervalle } 0 \leq i \leq P, & x_p = -\pi, & x_s = -\pi, \\ \text{,, , , } P \leq i \leq \Phi, & x_p = 0, & x_s = -\pi, \\ \text{,, , , } \Phi \leq i \leq P', & x_p = \vartheta_p, & x_s = \vartheta_s - \pi, \\ \text{,, , , } P' \leq i \leq (\pi/2), & x_p = \vartheta_p - \pi, & x_s = \vartheta_s - \pi, \end{array} \right.$$

wobei P den zu der an der Grenzfläche der Glas-Luft erfolgenden Reflexion gehörenden Polarisationswinkel, P' jenen zu der an der Grenzfläche der Glas-Flüssigkeit erfolgenden Reflexion gehörenden Polarisationswinkel und Φ bzw. Φ' die hierhergehörenden Grenzwinkel der totalen Reflexion bedeuten.

Die Werte von x_p und x_s sind in jenem Falle gültig, wenn an der Prismenfläche keine besondere Oberflächenschichte vorhanden ist. Eine solche Oberflächenschichte hat nur in der Nähe des Polarisationswinkels auf die Erscheinung einen wahrnehmbaren Einfluß, bei der totalen Reflexion dagegen ist ihre Wirkung kaum wahrnehmbar.¹⁾ Dies ist die Ursache, warum wir in unserer vorhergehenden Arbeit diese Wirkung nicht in Betracht zogen.

Jetzt hingegen, wo wir über die allgemeine Theorie der Erscheinung sprechen, müssen wir auch diese Wirkung berücksichtigen.

Der störende Einfluß dieser Oberflächenschichte zeigt sich nur bei partieller Reflexion des Lichtes, und auch dort nur in den Werten von x_p , und zwar dadurch, daß die beim Polarisationswinkel eintretende Veränderung der Werte von x_p in Größe von π , nicht sprungweise, sondern stetig, obzwar sehr rasch, erfolgt.

Die Abhängigkeit der Verschiebung x_p vom Einfallswinkel des Lichtes im Bereiche partieller Reflexion haben Cauchy²⁾ und andere untersucht.

Quincke³⁾ wies die Cauchysche Formel in der Weise nach, daß er einen Teil der Hypothenusenfläche eines Glasprismas mit Spiegelfolie belegte, und die Phase des an dem nicht belegten Flächenteil des Prismas reflektierten Lichtes, mit der Phase des am belegten Teile des Prismas reflektierten Lichtes verglich. Ich habe es in meiner vorhergehenden Abhandlung versäumt der Quinckeschen Arbeit Erwähnung zu tun, was ich hiermit nachhole.

Nachdem wir dies vorausgeschickt haben, können wir wieder auf die Besprechung der Werte von x zurückkehren.

Der Wert x fällt überall zwischen die entsprechenden

1) P. Drude, Wied. Ann. 43. p. 146. 1891.

2) A. Cauchy, Compt. Rend. 9. p. 730. 1839.

3) G. Quincke, Pogg. Ann. 142. p. 177. 1871.

Werte von x_p und x_s , demnach schreitet die Kurve x überall zwischen den Kurven x_p und x_s fort. Es ist demnach leicht, der Abhängigkeit der Werte x vom Einfallswinkel zu folgen.

Der Wert x weicht auch bei einem nur etwas kleineren Einfallswinkel als P von 0 nicht wahrnehmbar ab, wenn die Flüssigkeit optisch dünner als das Glas ist; ist die Flüssigkeit optisch dichter als das Glas, dann ist die Abweichung von $-\pi$ ebenfalls nicht wahrnehmbar. (Ist keine Oberflächenschicht vorhanden, so ist x genau gleich 0 bzw. $-\pi$.)

Die Formel (24) gibt uns über die Verschiebung in dem Intervall zwischen P und Φ keine Aufklärung, da hier die Formel für die Streifenverschiebung mehreren Werten, nämlich jenen von 0 und $\pm \pi$ entspricht. Welche von diesen Größen der Wirklichkeit entspricht, können wir leicht bei einiger Überlegung ermitteln.

Das resultierende Interferenzsystem setzt sich nämlich aus zwei Interferenzsystemen zusammen. Die beiden Komponenten p und s des resultierenden Lichtes erzeugen je ein voneinander unabhängiges Interferenzsystem. Die Maxima des einen dieser Interferenzsysteme gemäß (25) bzw. (26) fallen im Intervall zwischen P und Φ mit den Minima des anderen Systems zusammen und vice-versa. Demnach ist die Intensität des resultierenden Interferenzsystems gleich der algebraischen Summe der Intensitäten der beiden Interferenzsysteme. Ist demnach die Intensität des resultierenden Lichtes an der Stelle der Maxima des Interferenzsystems der Komponenten s größer oder kleiner als die resultierende Intensität an der Stelle der Maxima des Interferenzsystems der Komponenten p , so fallen die Maxima des resultierenden Interferenzsystems mit den Maxima des Interferenzsystems der Komponenten s bzw. p zusammen.

Nehmen wir nun an, daß die Flüssigkeit optisch dünner als das Glas ist.

Die Formel (21) gibt uns die resultierende Intensität der mit " bezeichneten Schwingungen. Demnach ist die Intensität im Intervall zwischen P und Φ (wobei $x_s = \delta_s - \delta'_s = 0$, $x_p = \delta_p - \delta'_p = \pi$ ist)

$$J_{\omega''} = \frac{J}{2} r^2 r'^2 \{ f_s^2 d_s^2 d_s'^2 \sin^2 \omega (v_s^2 + v_s'^2 + 2v_s v_s' \cos x) + f_p^2 d_p^2 d_p'^2 \cos^2 \omega (v_p^2 + v_p'^2 - 2v_p v_p' \cos x) \}.$$

Die Intensität des resultierenden Lichtes ist bei

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 2k\pi \\ I_{x=0} = \frac{J}{2} r'^2 \{ f_s^2 d_s^2 d_p'^2 (v_s + v_p)^2 \sin^2 \omega \\ \quad + f_p^2 d_p^2 d_s'^2 (v_p - v_s)^2 \cos^2 \omega \} \\ \text{und bei } x = \pm k\pi \\ I_{x=\pi} = \frac{J}{2} r'^2 \{ f_s^2 d_s^2 d_p'^2 (v_s - v_p)^2 \sin^2 \omega \\ \quad + f_p^2 d_p^2 d_s'^2 (v_p + v_s)^2 \cos^2 \omega \}. \end{array} \right.$$

Untersuchen wir nun das Verhältnis dieser beiden Intensitäten, während wir das Nikol drehen.

Bei $\omega = 0^\circ$ ist

$$\left(\frac{I_{x=0}}{I_{x=\pi}} \right)_{\omega=0} = \left(\frac{v_p - v_p'}{v_p + v_p'} \right)^2$$

kleiner als die Einheit, hingegen bei $\omega = 90^\circ$ ist

$$\left(\frac{I_{x=0}}{I_{x=\pi}} \right)_{\omega=90^\circ} = \left(\frac{v_s + v_s'}{v_s - v_s'} \right)^2$$

größer als die Einheit.

Demnach liegen die Maxima der Intensität bei $\omega = 0^\circ$ in $x = \pm k\pi$ (die Verschiebung ist gleich π); bei $\omega = 90^\circ$ hingegen sind die Maxima der Intensität in $x = \pm 2k\pi$ (die Verschiebung ist gleich 0).

Drehen wir das Nikol langsam von $\omega = 0^\circ$ ausgehend, dann wachsen die ersten Summanden der Formel (27) stetig, während hingegen die zweiten Summanden stetig abnehmen. Die Differenz zwischen den beiden Intensitäten vermindert sich allmählich und verschwindet bei einem Azimut, welches wir ω_0 bezeichnen, gänzlich.

Dieses Azimut ergibt sich aus der Gleichung

$$I_{x=0} = I_{x=\pi}$$

wie folgt:

$$(28) \quad \omega_0 = \arctg \sqrt{\frac{f_p^2 d_p^2 d_p'^2 v_p v_p'}{f_s^2 d_s^2 d_s'^2 v_s v_s'}}.$$

Da $v_p v_p'$ im Vergleich zu $v_s v_s'$ sehr gering ist, so ist ω_0 ein sehr kleiner Winkel.

Bei weiterer Drehung des Nikols tritt der Unterschied der Intensitäten wieder hervor, aber jetzt ist $I_{x=0}$ größer als $I_{x=\pi}$, d. h. die Streifenverschiebung ist ständig gleich 0.

Auf analoge Weise können wir auch feststellen, daß, wenn die Flüssigkeit optisch dichter als das Glas ist, die Streifenverschiebung in dem Intervall $0 \leq \omega < \omega_0$ überall 0 ist, in jenem von $\omega_0 < \omega \leq 90^\circ$ jedoch $-\pi$ ist.

Fassen wir nun die beiden Resultate zusammen: 1. Fällt das Azimut ω zwischen ω_0 und 90° ($\omega_0 < \omega \leq 90^\circ$), so ist die Verschiebung gleich jener, welche zu $\omega = 90^\circ$ gehört (d. h. wenn die Flüssigkeit optisch dünner als das Glas ist, so ist die Verschiebung gleich 0, im entgegengesetzten Fall gleich $-\pi$). 2. Ist das Azimut kleiner als ω_0 ($0 \leq \omega < \omega_0$), dann hat die Verschiebung jenen Wert, welcher zu $\omega = 0^\circ$ gehört (d. h. wenn die Flüssigkeit optisch dünner ist als das Glas, so ist die Verschiebung beinahe gleich $+\pi$, im entgegengesetzten Fall beinahe gleich 0). Die Abweichung von $+\pi$ bzw. von 0 wird durch eine eventuell vorhandene Oberflächenschicht verursacht.

Da der Winkel ω_0 sehr gering ist, so ändert sich das Verhältnis der Intensitäten in der Nähe dieses Azimuts sehr rapid. Hieraus folgt, daß das eine System während der Drehung des Nikols sprunghaft in das andere übergeht.

Im Fall der Einfallswinkel größer ist als der Winkel P' , so ändert sich die Verschiebung x mit dem Azimut ω zwischen x_s und x_p stetig und monoton.

§ 6. Experimentelle Bestätigung.

Meine experimentellen Beobachtungen teile ich nachstehend mit.

Ich verwandte für meine Versuche mehrere Glasprismen und verschiedene Flüssigkeiten (und zwar Wasser, Alkohol, Äther, Benzol, Toluol, Petroleumäther, Schwefelkohlenstoff, α -Bromnaphthalin, Methylenjodid). Von diesen Flüssigkeiten sind die sechs ersten optisch dünner, die letzten drei dagegen optisch dichter als die benutzten Glasprismen.

1. Zuerst beschreiben wir jene Erscheinung, welche dann eintritt, wenn die Flüssigkeit optisch dünner als das Glas ist.

Das Intervall zwischen dem normalen Einfall und dem Polarisationswinkel P ist weniger interessant, weil hier die Maxima und Minima der beiden Streifensysteme unabhängig vom Pola-

risationszustand des Lichtes, in die Fortsetzung voneinander fallen, so wie es sich auch aus der Theorie ergibt.

Viel lehrreicher ist das zwischen den Polarisationswinkeln P und P' befindliche Intervall. In diesem Intervall können wir folgende interessante Erscheinungen beobachten.

Gehen wir zunächst von jener Lage des Nikols aus, in welcher das Licht in der Einfallsebene polarisiert ist. Drehen wir nun das Nicol langsam um das Lichtbündel herum und beobachten wir während der ganzen Umdrehung die Veränderungen der Streifenverschiebung.

In der anfänglichen Lage des Nikols fallen die Streifen der beiden Interferenzsysteme in die Fortsetzung voneinander. Bei der langsam ausgeführten Drehung des Nikols kann man, abgesehen von der Intensitätsänderung des Lichtes, während längerer Zeit gar keine Veränderung wahrnehmen, plötzlich aber, nachdem wir das Nicol schon in einem Winkel von fast 90° von der Anfangslage gedreht haben, verschwinden die Streifen des mit " bezeichneten Interferenzsystems und verschieben sich sprunghaft um ca. $\frac{1}{2}$ Streifenbreite an der mit der Flüssigkeit befeuchteten Stelle. Aus vorhergehendem geht hervor, daß die plötzliche Änderung dann eintritt, wenn die Polarisationssebene des Lichtes mit der Normale der Einfallsebene den vorhin erwähnten Winkel ω_0 bildet.

Die Streifenverschiebung bleibt während der weiteren Drehung des Nikols so lange unverändert, bis die Polarisationssebene des Lichtes mit der Normale der Einfallsebene jenseits der Normale denselben Winkel ω_0 bildet, wie sie ihn diesseits der Normale bei der plötzlichen Veränderung bildete. Die Streifen verändern sich bei diesem Winkel wieder sprunghaft, und zwar schieben sie sich in ihre früheren Stellungen an den von der Luft begrenzten Flächenteil zurück. Bei Drehung des Nikols in einen Winkel von $270^\circ - \omega_0$, gerechnet vom Ausgangspunkt der Drehung wiederholt sich die vorige Erscheinung: die Streifen schieben sich wieder sprunghaft bei $270^\circ - \omega_0$ um eine halbe Wellenlänge an die mit der Flüssigkeit befeuchtete Stelle, bei $270^\circ + \omega_0$ dagegen schieben sie sich wieder an den von der Luft begrenzten Flächenteil zurück, mit einem Worte die Erscheinung ist dieselbe, wie zwischen den Azimuten $90^\circ - \omega_0$ und $90^\circ + \omega_0$.

Meine mit verschiedenen Flüssigkeiten ausgeführten Experimente erbrachten den Beweis, daß die vorhin erwähnte Verschiebung der Streifen um eine halbe Wellenlänge stets an die von der Flüssigkeit begrenzte Stelle erfolgte.

Die akzidentelle Doppelbrechung des Prismas kann auf die Erscheinung von größerem, störendem Einfluß sein. Verwenden wir jedoch ein Prisma frei von Doppelbrechung, dann hat nur noch die Oberflächenschichte einen wahrnehmbaren Einfluß.

Die Streifen sind in der Nähe des Polarisationswinkels sehr undeutlich, in geringer Entfernung von diesem Winkel sind sie aber so scharf und deutlich, daß sie schon für quantitative Messungen geeignet sind.

Die Verschiebung innerhalb der Intervalle zwischen dem Polarisationswinkel P' und dem normalen Einfall geht stetig während der Drehung des Nikols aus dem Werte von x , in jenen von x_p über.¹³

In meiner vorigen Arbeit (Ann. d. Phys. 42. p. 1191—1192. 1913) habe ich die Werte von x , und x_p bei mehreren Einfallswinkeln bestimmt.

In den folgenden Tabellen stelle ich meine weiteren Beobachtungsresultate zusammen.

Die Streifenverschiebungen in Winkelmaßen ausgedrückt

Einfallswinkel	Das Licht ist unpolarisiert			Das aus dem Prisma herastretende Licht ist in Azimut von 45° polarisiert		
	Beob.	Theor.	Diff.	Beob.	Theor.	Diff.
45°	+48,6°	+43,5°	+5,1°	+48,9°	+43,5°	+5,4°
50	73,6	69,1	+4,5	72,9	69,1	+3,8
55	89,0	89,6	-0,6	93,7	89,6	+4,1
59	107,7	104,1	+3,6	109,9	104,1	+5,8
60	108,4	107,8	+0,6	111,4	107,8	+3,6
61	100,1	95,3	+4,8	99,4	95,3	+4,1
65	59,7	57,9	+1,8	60,2	57,9	+2,3
70	42,0	39,2	+2,8	41,3	39,2	+2,1
75	27,4	26,9	+0,5	26,7	26,9	-0,2
80	18,6	17,1	+1,5	16,8	17,1	-0,3

Die Streifenverschiebungen in Winkelmaßen ausgedrückt

Einfallswinkel	Das Licht ist unpolarisiert			Das ins Prisma eintretende Licht ist in Azimut von 45° polarisiert		
	Beob.	Theor.	Diff.	Beob.	Theor.	Diff.
45°	+46,0°	+45,3°	+0,7°	+44,3°	+46,8°	-2,5°
50	71,3	73,0	-1,7	77,3	75,7	+1,6
55	95,6	94,9	+0,7	94,6	98,2	-3,6
60	111,7	113,5	-1,8	114,4	116,8	-2,4
65	59,2	60,9	-1,7	62,2	62,6	-0,4
70	41,1	41,2	-0,1	40,9	42,2	-1,3
75	28,7	28,3	+0,4	29,4	29,0	+0,4
80	18,1	18,0	+0,1	17,6	18,4	-0,8

Zu meinen quantitativen Beobachtungen benutzte ich destilliertes Wasser und dasselbe Prisma, wie für die Beobachtung der absoluten Phasenänderung des total reflektierten Lichtes.

Die zwei Tabellen enthalten vier Messungsreihen. In beiden Tabellen sind die Resultate der ersten Messungsreihe für den Fall des nicht polarisierten Lichtes gültig; die zweite Reihe der Tabellen beziehen sich auf das im Azimut von 45° polarisierte Licht. In dem einen Fall haben wir das ins Prisma eintretende und im anderen Fall das aus dem Prisma austretende Licht polarisiert. Die theoretischen Werte wurden mit Hilfe der vorhin abgeleiteten Formeln berechnet.

Die Resultate der ersten Tabelle beziehen sich auf solche Beobachtungen, bei welchen das Licht auf dem Fresnelschen Doppelspiegel unter einen Winkel von 79° 16' fiel. Das Verhältnis der zu diesem Einfallswinkel gehörenden Fresnelschen Faktoren ist

$$\frac{f_p}{f_s} = 0,6306.$$

Die Resultate der zweiten Tabelle beziehen sich auf das auf dem Fresnelschen Doppelspiegel unter einen Winkel von 86° 15' fallende Licht, d. h. auf das Verhältnis

$$\frac{f_p}{f_s} = 0,8583.$$

2. Auf Grund des Vorausgehenden können wir leicht jenen Fall vornehmen, in welchem die Flüssigkeit optisch dichter als das Glas ist.

Meine Beobachtungen sind folgende:

Im Intervalle $0 < i < P$ sind die Streifen unabhängig vom Polarisationszustand des Lichtes um ca. $\frac{1}{2}$ Wellenlänge gegen das von der Luft reflektierte Licht verschoben.

Die Streifen verschieben sich im Intervalle $P < i < P'$ während der Drehung des Nikols ebenso wie im Falle der optisch-dünneren Flüssigkeit als das Glas sprungweise. Wenn das Licht in der Einfallsebene polarisiert ist, dann sind die Streifen um ca. $\frac{1}{2}$ Wellenlänge gegen das von der Luft reflektierte Licht verschoben; bei Drehung des Nikols bleibt die Verschiebung eine Weile unverändert, wenn aber die Polarisationssebene mit der Normale der Einfallsebene einen Winkel von ω_0 bildet, dann verschieben sich die Streifen um ca. $\frac{1}{2}$ Streifenbreite sprungweise gegen das von der Flüssigkeit reflektierte Licht, so daß die Verschiebung gleich 0 wird. Bei weiterer Drehung des Nikols bleiben die Streifen unverändert, nachdem wir aber das Nikol vom Azimut der sprungweisen Änderung um einen Winkel von $2\omega_0$ gedreht haben, schieben sich die Streifen um ca. $\frac{1}{2}$ Wellenlänge gegen das von der Luft reflektierte Licht zurück.

Im Intervall $P < i < (\pi/2)$ ändert sich die Streifenverschiebung stetig zwischen den Werten x_s und x_p .

Wenn wir die hier beschriebenen experimentellen Resultate mit den theoretischen vergleichen (§ 5), so sehen wir sofort die vollkommene Harmonie zwischen Theorie und der Praxis.

Aber wir können aus unseren Beobachtungen auch eine weitere, wichtige Folgerung ableiten, die sich auf die durch die Reflexion an optisch dichteren Medien hervorgerufene Phasenänderungen von $\frac{1}{2}$ Wellenlänge bezieht.

Meine experimentellen Beobachtungen wiesen die Richtigkeit der Werte und Vorzeichen der Formeln (25) und (26) nach.

Bei Feststellung des Vorzeichens ist die genaue Kenntnis der Verschiebungsrichtung sehr wichtig. Ich konnte die Richtung genau feststellen, weil das rechts und links vom mittleren Maximum des Interferenzsystems fallende erste Minimum schwarz ist, die übrigen hingegen sind mehr oder weniger farbig; außerdem habe ich das Vorzeichen der Streifenverschiebung entsprechende Phasenänderungen nicht nur auf theoretischem

Wege, sondern auch experimentell festgestellt, und zwar derart, daß ich im Wege des einen Strahlenbündels eine Glimmerplatte einführte. Das Streifensystem verschob sich gegen das Strahlenbündel, welches die Glimmerplatte durchsetzte. Wir sahen dagegen, daß wenn das an optisch dichteren Medien reflektierende Bündel mit dem Lichtbündel, welches unter gleichem Winkel an optisch dünneren Medien reflektiert wird, interferiert, sich die Interferenzstreifen gegen das an optisch dünneren Medien reflektierte Licht verschieben.

Die Verschiebung ist demnach jener Richtung entgegengesetzt, in die sich die Streifen verschieben würden, wenn wir in den Weg des an optisch dichteren Medien reflektierenden Lichtes eine Glimmerplatte einführen würden.

Die Glimmerplatte verzögert die Phase des durchgehenden Lichtes, deshalb beschleunigt die an optisch dichteren Medien erfolgende Reflexion die Phase des an optisch dünneren Medien reflektierten Lichtes.

Wir gelangen ebenfalls zum selben Resultat, wenn wir die Gleichungen (25) und (26) vereinigen und daraus d_1 und d_2 eliminieren.

Wenn wir also übereinkommen, was in besonderer Beziehung willkürlich ist, daß das an optisch dünneren Medien partiell reflektierte Licht durch die Reflexion keine Phasenänderung erleidet, dann ergibt sich aus dem Vorangehenden, daß die Phase des an optisch dichteren Medien reflektierten Lichtes im Vergleich zur jenen des einfallenden Lichtes um $\frac{1}{2}$ Wellenlänge beschleunigt wird.

Ich hebe mein Resultat deswegen besonders hervor, weil in der Literatur beinahe überall von Phasenverzögerungen gesprochen wird.

Zum Schlusse sei es mir gestattet Hrn. Prof. Baron Roland von Eötvös für all seine gütige Unterstützung, durch die er meine Arbeit freundlichst förderte, meinen ergebensten und wärmsten Dank auszusprechen. Ich gedenke ferner auch in Dankbarkeit des Hrn. Prof. Isidor Fröhlich, welcher mich ebenfalls durch wertvolle Ratschläge unterstützte.

Budapest, Erstes physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 12. November 1914.)

3. Die Diffusion der Gase durch Quecksilberdampf bei niederen Drucken und die Diffusionsluftpumpe¹⁾;

von W. Gaede.

Inhalt: Einleitung. — 1. Versuchsanordnung und Ausführung der Diffusionsmessungen. — 2. Bestimmung der Diffusionskonstanten aus Versuchen im Vakuum. — 3. Einfluß der Diffusion auf Erzeugung und Messung sehr niederer Drücke. — 4. Praktische Anwendung der Diffusion zur Erzeugung einer mechanischen Saugwirkung. — 5. Theorie der Gegenströmung von Gas und Dampf durch eine enge Öffnung. — 6. Konstruktion und Leistung der Diffusionsluftpumpe. — 7. Zusammenfassung der Resultate.

Die Kenntnis der Diffusion der Gase durch Quecksilberdampf ist von besonderer Bedeutung für die Beurteilung der niedersten Gasdrucke, welche mit Quecksilberluftpumpen erzielt werden können. Die Ansichten über die Bedeutung der extrem niederen Drücke, welche mit einer Quecksilberluftpumpe erzeugt und mit einem MacLeodschen Manometer gemessen werden, sind sehr verschieden. Neben der Ansicht, daß die gemessenen Verdünnungen tatsächlich vorhanden sind, finden wir auch die entgegengesetzte Überzeugung vertreten, indem es für unmöglich angesehen wird, mit einer Quecksilberluftpumpe Totaldrucke zu erreichen, welche niedriger sind als die etwa 0,0013 mm betragende Spannkraft der Quecksilberdämpfe in der Pumpe. So finden wir bei der Besprechung der mit Quecksilberluftpumpen erreichten und mit dem MacLeodschen Manometer gefundenen Minimaldrucke in der neuesten Auflage vom Jahre 1906 in dem Lehrbuch der Physik von Müller-Pouillet auf p. 505 die Bemerkungen:

1) Ein Teil der hier mitgeteilten Diffusionsmessungen ist in meiner Freiburger Habilitationsschrift, betitelt „Die äußere Reibung der Gase“ enthalten. Die Habilitationsschrift enthält ferner Teile meiner Veröffentlichungen in den Ann. d. Phys. 41. p. 289 u. 337. 1913.

„Wir müssen jedoch darauf aufmerksam machen, daß die auf solche Weise gefundenen Minimaldrucke sich nur auf den Druck der zurückgebliebenen Luft, nicht auf den Gesamtdruck beziehen, der sich aus dem Druck der Luft und dem Druck des Quecksilberdampfes zusammensetzt.“

„Steht mit der Pumpe ein Rezipient in Verbindung, der nur ein Gas, aber kein Quecksilber (oder andere Flüssigkeit) enthält, so kann demnach dieses Gas auch nicht weiter als auf etwa 0,0013 mm verdünnt werden. Anders steht die Sache, wenn durch Diffusion oder auf andere Weise auch das im Rezipienten enthaltene Gas mit Quecksilberdämpfen gesättigt wurde. Es kann dann auch in diesem zwar nicht der Totaldruck, wohl aber der vom Gase allein ausgeübte Partialdruck ebenso weit herabgesetzt werden wie im Torricellischen Raume der Pumpe.“

1. Versuchsanordnung und Ausführung der Diffusionsmessungen.

Um über diese Fragen Gewißheit zu haben, wählte ich mir eine Versuchsanordnung (Fig. 1), welche gestattet, die dynamischen Gleichgewichtszustände zwischen verdünnten Gasen und Quecksilberdampf zu untersuchen.

Das Glasgefäß *A* befindet sich mit seinem unteren Ende in einem heizbaren Ölbade *O*, dessen Temperatur gemessen wird. Das 2 mm weite Ansatzrohr *a* ist durch den Boden des Messinggefäßes *O* geführt und bei *W* durch eine Asbest-Wasserglaskittung eingekittet. Der Schlauch *Q* verbindet das Rohr *a* mit dem Quecksilbergefaß *G*. Vom oberen Ende des Gefäßes *A* führt das Diffusionsrohr *R* von ca. 1 cm Durchmesser und 20 cm Länge zu dem Kondensationsgefäß *C*. Von hier aus führt die Leitung *L* zu dem von mir angegebenen¹⁾ abgekürzten Kompressionsvakuumeter *M* mit direkter Ablesung und zu meiner rotierenden Quecksilberluftpumpe. *P* ist ein mit Phosphorpentoxyd gefülltes Trockengefaß. Der Hahn *H* hatte 7 mm Bohrung und war während der Messung geschlossen.

Der Vorgang bei der Messung war folgender: Wurde das Gefäß *G* angehoben, während die Apparatur evakuiert war,

1) W. Gaede, Ann. d. Phys. 41. p. 297. Anm. 1. 1913.

so stieg das Quecksilber von m bis n . Bei n nahm das Quecksilber die Temperatur des beständig gerührten Ölbades an und verdampfte durch das Rohr R nach dem Gefäß C , das in Eis gekühlt war. Damit in dem Rohr R der Quecksilberdampf nicht kondensierte, waren A und R von den Stellen o bis s mit einer dünnen Lage Asbest belegt. Auf dem Asbest

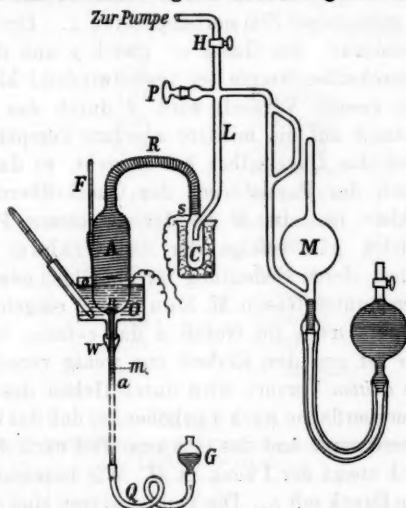


Fig. 1.

war in möglichst gleichmäßigen Windungen Nickelindraht aufgewickelt. Durch den elektrischen Strom wurde der Heizmantel auf 140° erwärmt. Diese Temperatur konnte an dem Thermometer F abgelesen werden, dessen Kugel sich zwischen Gefäß A und dem Heizmantel befand.

Mit dieser Versuchsanordnung sollte bestimmt werden, in welchem Verhältnis die Partialdrucke der in A und M befindlichen Gase stehen, wenn gleichzeitig der Partialdruck des Quecksilberdampfes in A und M verschieden ist. Daraus ergibt sich dann, in welchem Maß das Gas durch den Quecksilberdampf von A nach M gedrängt wird. Der Partialdruck des Quecksilberdampfes in A ist gleich dem Sättigungsdruck des Quecksilberdampfes bei der Temperatur des Ölbades. Der Partialdruck in C ist von der Größenordnung des Sättigungs-

druckes bei 0° , d. i. 0,0002 mm und konnte praktisch bei diesen Versuchen vernachlässigt werden.

Das Volumen des Gefäßes A bis zur Stelle s sei v_1 , das bis s reichende Volumen des Gefäßes M sei v_2 . In unserem Falle war $(v_1/v_2) = 1,26$.

In einem *ersten* Versuch haben beide Gefäße die im absoluten Maß gemessene Zimmertemperatur T . Der bei M gemessene Partialdruck des Gases sei gleich p und der Partialdruck der Quecksilberdämpfe sei verschwindend klein.

Bei dem *zweiten* Versuch wird A durch das Ölbad und den Asbestmantel auf die mittlere absolute Temperatur T_1 erhitzt, während das Quecksilber bei m steht, so daß auch bei diesem Versuch der Partialdruck der Quecksilberdämpfe verschwindend klein ist. In M sei der gemessene Partialdruck des Gases gleich p' . Infolge der von Graham entdeckten Thermodiffusion, deren Bedeutung für die Gleichgewichtsbedingungen in verdünnten Gasen M. Knudsen¹⁾ eingehend behandelt hat, ist der Druck im Gefäß A das c -fache von p' , also gleich cp' . c ist von der Einheit nur wenig verschieden.

Bei dem *dritten* Versuch wird durch Heben des Gefäßes G die Quecksilberoberfläche nach n gehoben, so daß das Quecksilber im Gefäß A verdampft und das Gas zum Teil nach M verdrängt wird. Dadurch steigt der Druck in M . Wir bezeichnen den bei M abgelesenen Druck mit p_2 . Die Temperaturen sind die gleichen wie beim zweiten Versuch. Der Druck in A sei p_1' .

Die Bedingung, daß die Summe der in den beiden Gefäßen A und M durch die Größen p v und T , Druck, Volumen und absolute Temperatur, definierten Gasmengen bei allen drei Versuchen gleich sein müssen, gibt uns auf Grund des Boyle-Gay-Lussacschen Gasgesetzes die Gleichungen:

$$1) \quad \frac{v_1 p}{T} + \frac{v_2 p}{T} = \frac{v_1 c p'}{T_1} + \frac{v_2 p'}{T} = \frac{v_1 p_1'}{T_1} + \frac{v_2 p_2}{T}.$$

Hieraus erhalten wir die Gleichung:

$$(2) \quad h = \frac{1 p_1'}{c p_2} = \frac{\frac{p}{p_2} \left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right) - 1}{\frac{p}{p'} \left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right) - 1},$$

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 31. p. 205. 1910.

wenn wir mit k das allein durch die Wirkung der Quecksilberdämpfe erzeugte Druckverhältnis bezeichnen.

Tabelle I.

Luft $p = 0,004$ mm			
P	k	g	D
0,0017	0,98	—	—
0,002	0,98	—	—
0,003	0,94	0,0000045	(0,36)
0,004	0,90	0,0000056	0,25
0,0085	0,79	0,000012	0,25
0,0099	0,73	0,0000138	0,21
0,0125	0,68	0,0000175	0,21
0,013	0,69	0,0000185	0,23
0,032	0,37	0,000047	0,22
0,033	0,38	0,0000485	0,24
0,051	0,17	0,000076	0,21
0,097	0,08	0,000127	0,24
0,133	0,07	0,00024	(0,43)
0,32	0,06	Mittelwert:	0,23

Tabelle II.

Luft $p = 0,04$ mm			
P	k	g	D
0,002	1,0	—	—
0,004	0,99	—	—
0,010	0,91	—	—
0,0155	0,86	—	—
0,016	0,85	0,0000131	(0,37)
0,0225	0,74	0,0000129	0,20
0,032	0,66	0,0000202	0,23
0,046	0,54	0,0000286	0,22
0,05	0,50	0,0000301	0,20
0,067	0,34	0,0000356	0,16
0,086	0,22	0,0000464	0,14
0,093	0,21	0,000056	0,17
0,123	0,075	0,00008	0,15
0,14	0,05	0,000108	0,17
0,15	0,04	Mittelwert:	0,18
0,18	0,04		
0,25	0,03		

Tabelle III.

Wasserstoff $p = 0,04$ mm			
P	k	g	D
0,002	0,98	—	—
0,004	0,95	0,0000024	(0,23)
0,0098	0,92	0,0000094	0,52
0,0205	0,86	0,0000218	0,70
0,039	0,78	0,000046	0,87
0,075	0,56	0,000086	0,71
0,093	0,48	0,000109	0,70
0,123	0,33	0,000144	0,62
0,17	0,20	0,000218	0,64
0,219	0,09	0,000302	0,59
0,224	0,09	0,000314	0,62
0,32	0,04	Mittelwert:	0,66

Es wurden drei Versuchsreihen ausgeführt. Die Resultate stehen in den Tab. I, II u. III. P bedeutet den Dampfdruck des Quecksilbers, wie er sich nach der Hertzschen Inter-

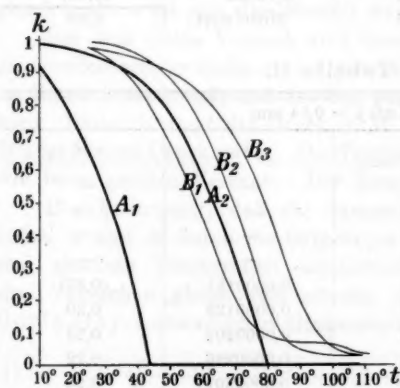


Fig. 2.

Fig. 2 sind die Werte der Tab. I, II u. III graphisch dargestellt, indem die Ordinaten das gefundene Druckverhältnis k und die Abszissen die Temperatur t des verdampfenden Quecksilbers geben.

1) H. Hertz, Ann. d. Phys. 17. p. 193. 1882.

polationsformel¹⁾ aus der abgelesenen Temperatur des Ölbades ergibt. Bei der ersten Versuchsreihe war die Apparatur mit Luft von dem Druck $p = 0,004$ mm, bei der zweiten Versuchsreihe mit Luft von dem Druck $p = 0,04$ mm, bei der dritten Versuchsreihe mit Wasserstoff von dem Druck $p = 0,04$ mm gefüllt.

In den Kurven B_1 und B_2 und B_3 der

Außerdem sind zum Vergleich die Kurven für diejenigen Werte von h eingetragen, welche man erhalten würde, wenn man in Gleichung (1) die Bedingung einführt:

$$(3) \quad p_1 + P_1 = p_2 + P_2,$$

d. i. die Bedingungsgleichung, welche bei der theoretischen Behandlung der Diffusionsvorgänge als Grundbedingung eingeführt wird und aussagt, daß die Summe der Partialdrucke p des Gases und P des Quecksilbers konstant ist. Im vorliegenden Fall ist P_2 eine zu vernachlässigende Größe. Die unter diesen Voraussetzungen für $p = 0,004$ mm berechnete Kurve ist mit A_1 , die Kurve für $p = 0,04$ mm mit A_2 bezeichnet.

Die Kurven zeigen, daß die Verhältnisse im Vakuum ganz anders liegen als wie bei höheren Drucken, bei welchen die Kurve A_1 mit B_1 und die Kurve A_2 mit B_2 und B_3 zusammenfallen müßten. Der Abstand der A - und B -Kurven ist für $p = 0,004$ mm größer als wie für $p = 0,04$ mm, und ist ferner größer bei Wasserstoff (B_3) als bei Luft (B_2). Da die Diffusionsgeschwindigkeit mit sinkendem Drucke zunimmt und bei Wasserstoff größer ist als bei Luft, so liegt es nahe, anzunehmen, daß die beobachteten Unterschiede in den Diffusionsgesetzen selbst begründet sind. Wir wollen deswegen sehen, ob es möglich ist, die Diffusionskonstante des Quecksilberdampfes gegen Luft und Wasserstoff aus diesen Versuchen zu berechnen.

2. Bestimmung der Diffusionskonstanten aus Versuchen im Vakuum.

Mit Stephan setzen wir für das durch den Diffusionswiderstand erzeugte Druckgefälle:

$$(4) \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{dP}{dx} = \frac{p P(u-u')}{D \cdot 760},$$

u ist die Geschwindigkeit des strömenden Quecksilberdampfes vom Druck P , u' ist die Strömungsgeschwindigkeit des Gases vom Druck p . In unserem speziellen Falle ist $u' = 0$. Die Größe dP ist der Anteil vom Druckabfall des Quecksilberdampfes, welcher dem Diffusionswiderstand zuzuschreiben ist. dp ist der entsprechende Druckabfall im Gase. D ist die auf

Atmosphärendruck bezogene Diffusionskonstante. Die Drucke sind in Millimeter-Quecksilbersäule einzuführen.

Bezeichnen wir mit g die Gewichtsmenge des per Sekunde durch den Querschnitt q des Rohres fließenden Quecksilberdampfes, so gilt für die mittlere Geschwindigkeit u des Quecksilberdampfes die Beziehung:

$$u = g \frac{RT}{MqP},$$

wenn $R = 62400$ die Gaskonstante, T die absolute Temperatur und M das Molekulargewicht des Dampfes ist. Setzen wir diesen Wert für u in Gleichung (4) ein, so erhalten wir:

$$\frac{dp}{p} = \frac{gRT}{760DqM} dx.$$

Integrieren wir diese Gleichung zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = L$, denen die Werte $p = p_1$ und $p = p_2$ entsprechen, so erhalten wir die Gleichung:

$$(5) \quad \lg \frac{p_2}{p_1} = \frac{gRTL}{760DqM}.$$

Führen wir Briggsche Logarithmen ein, so ist für $p_1/p_2 = k$

$$(6) \quad D = \frac{RTL}{760 \cdot 2,303 \cdot Mq} \cdot \frac{g}{\log^1/k}.$$

In unserem Fall war $M = 200,4$; $T = 413$; $L = 20$ cm; $g = 0,71$ qcm.

Zur Berechnung von D fehlt uns demnach noch die Kenntnis der Werte für g . Diese wurden in der Weise bestimmt, daß wie bei den Diffusionsversuchen der Asbestmantel auf 140° erhitzt und das Quecksilber während einer bestimmten Zeit von m bis n (Fig. 1) gehoben wurde. Das in Eis gekühlte Gefäß C war für diese Versuche mit einem abnehmbaren Schliff versehen, so daß die bei jedem Versuche kondensierte Quecksilbermenge gewogen werden konnte. Auf diese Weise erhielt ich bei der Temperatur t die Werte der Tab. IV.

Tabelle IV.

	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
g' (beobachtet)	0,00004	0,000087	0,000165	0,00032	0,0007	0,0013	0,0025
g' (berechnet)	0,000043	0,000086	0,000164	0,00033	0,00065	0,0013	0,0027

Die Werte von g' sind berechnet nach der empirischen Formel:

$$g' = (0,0016 + 0,0024 \cdot P) P,$$

wenn P die nach der Hertzschen Formel berechnete Dampfspannung des Quecksilbers bei der Temperatur t ist.

Bei diesen Versuchen war die Apparatur hoch evakuiert. Bei obigen Diffusionsversuchen war g kleiner infolge des Diffusionswiderstandes in dem stagnierenden Gase. Wir haben deswegen von dem Überdruck P des Dampfes den Diffusionsgegendruck ΔP zu subtrahieren. Es ist

$$(7) \quad \Delta P = \Delta p = p_2 - p.$$

Beachten wir ferner, daß $p_1/p_2 = k$ ist, so haben wir g zu berechnen nach der Formel:

$$(8) \quad g = (0,0016 + 0,0024 \cdot P) \cdot [P - p_2(1 - k)].$$

In den Tab. I, II und III sind die Werte für g und D nach den Gleichungen (6) und (8) berechnet. Die Tabellen zeigen uns, daß für verschiedene Werte von k die Werte für D konstant sind. Wegen der Schwierigkeit, die oberen und unteren Grenzwerte für k zu messen, sind die zugehörigen Werte für D auszuschließen. Ferner ist zu bemerken, daß wegen des geringen Abstandes der Kurven A und B die nach dieser Methode bei Luft von 0,04 mm Druck gemessenen Werte für D weniger genau ausfallen als in den beiden anderen Fällen. Tatsächlich zeigen die Werte für D in Tab. II eine geringere Konstanz als in den Tab. I und III.

Nach den Tabellen in Winkelmanns Handbuch der Physik ist die Diffusionskonstante der Gase und Dämpfe in Wasserstoff im Mittel 3,9 mal so groß als die Diffusionskonstante derselben Gase und Dämpfe in Luft. So hat dieser Quotient bei Kohlensäure den Wert 4, bei Sauerstoff den

Wert 3,75, bei Äther den Wert 3,85, bei Isobuttersäureamylester den Wert 4,05. Wir dürfen also annehmen, daß bei Quecksilber die Zahl denselben Wert hat. Dividieren wir den bei Wasserstoff gefundenen Mittelwert $D = 0,66$ durch 3,9, so erhalten wir $D = 0,17$. Dieser Wert stimmt mit dem direkt in Luft bei demselben Druck beobachteten, sich aus Tab. II ergebenden Mittelwert $D = 0,18$ befriedigend überein.

Da ich in der Literatur über die Diffusionskonstante des Quecksilbers keine Angaben fand, bestimmte ich zur Kontrolle die Diffusion des Quecksilberdampfes in Luft von Atmosphärendruck nach der Winkelmannschen Methode. Ein einseitig zugeschmolzenes Röhrchen von 0,3 mm Durchmesser wurde so weit mit Quecksilber gefüllt, daß die Luftsäule über dem Quecksilber am offenen Ende die Länge $L = 0,7$ cm hatte. Zusammen mit einem Thermometer wurde dieses Röhrchen in ein Messingrohr von 2 cm Durchmesser und 20 cm Länge gebracht, das mit einem Asbestmantel umkleidet und Nickelindraht umwunden war und elektrisch auf 200° erwärmt wurde. Die Röhre war unterhalb des Diffusionsröhrchens offen und oben durch Asbestscheiben verschlossen. Das Röhrchen wurde mehrere Stunden in dem Heizrohr gelassen und die Verkürzung des Quecksilberfadens infolge der Verdunstung mittels eines Zeisschen Okularmikrometers bestimmt.

Damit bei diesem Versuch die Diffusionskonstante theoretisch in gleicher Weise definiert ist wie bei den obigen Versuchen, leitete ich zur Berechnung von D aus Gleichung (4) die Gleichung ab:

$$D = \frac{h s R T \left(B - \frac{P}{2} \right) L}{t M 760 P},$$

worin s das spezifische Gewicht des Quecksilbers, $R = 62400$ die Gaskonstante, T die absolute Temperatur bei diesem Versuch, M das Molekulargewicht des Quecksilberdampfes, P den Dampfdruck des Quecksilbers bei der absoluten Temperatur T , B den Barometerstand in Millimeter, h die Verkürzung des Quecksilberfadens in Zentimeter, t die Versuchsdauer in Sekunden und L die mittlere Länge der Diffusionsluftsäule bei der

Temperatur T in Zentimeter bedeutet. Nach dieser Methode erhielt ich bei 200° den Wert $D = 0,32$.

Setzen wir die Diffusionskonstante dem Quadrat der absoluten Temperatur proportional, so erhalten wir für 140° den Wert $D = 0,244$. Die Beobachtung bei 140° und bei $0,04$ mm Druck gab den Wert $D = 0,18$ und bei $0,004$ mm Druck den Wert $D = 0,23$. Ob diesen Abweichungen eine prinzipielle Bedeutung beizumessen ist, läßt sich hier nicht entscheiden. Die durch das kurze und weite Rohr R (Fig. 1) fließenden Dampfmengen sind so groß, daß möglicherweise bei der Kondensation im Gefäß C die Dampfdrucke größer sind als wie der Temperatur des Eises entspricht. Bei der absoluten Bestimmung der Diffusionskonstanten fällt eine derartige Fehlerquelle sehr in das Gewicht, während zur Entscheidung der oben gestellten Fragen diese Fehlerquelle unwesentlich ist. Für genaue, absolute Messungen müßte die Röhre R lang und eng sein und durch einen Termostaten auf konstanter Temperatur gehalten werden, damit die Strömungsverhältnisse sich einwandfrei kontrollieren lassen. In einer derart verbesserten Form würde die angegebene Methode bei der Untersuchung der Frage wertvolle Dienste leisten können, ob der Diffusionskoeffizient eine Konstante oder eine Funktion der Partialdrucke ist, weil diese Frage bisher nur für den Fall¹⁾ untersucht werden konnte, daß die Summe der Partialdrucke konstant ist, während die hier angegebene Methode von dieser Beschränkung frei ist.

3. Einfluß der Diffusion auf Erzeugung und Messung sehr niederer Drucke.

Wir berechnen hier den Einfluß der Diffusion für den Fall, daß der Dampf sich bewegt und daß das Gas ruht. Die hydrodynamische Gleichung für die Bewegung der Gase²⁾ ist, wenn wir für den Koeffizienten der äußeren Reibung \mathcal{R} einen in dem Druckintervall p_1 bis p_2 giltigen Mittelwert ein-

1) Vgl. A. Lonius, Die Abhängigkeit des Gasdiffusionskoeffizienten vom Mischungsverhältnis. Ann. d. Phys. 29. p. 664. 1909.

2) W. Gaede, Ann. d. Phys. 41. p. 289. 1913.

führen, wenn η den Koeffizienten der inneren Reibung bedeutet und unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungsweise g die Gewichtsmenge des durch ein Rohr von der Länge L mit dem Radius r per Sekunde strömenden Gases ist,

$$(9) \quad g = \frac{M}{RTL} \left(\frac{\pi r^4 P_1 + P_2}{8\eta} + \frac{\pi r^3}{2\phi} \right) (P_1 - P_2 - \Delta P).$$

Mit den Gleichungen (5) und (7) erhalten wir

$$(10) \quad p_1 + P_1 = p_2 + P_2 + \frac{D 760 \lg \text{nat} \frac{P_2}{P_1}}{r \left(\frac{r}{8\eta} \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{1}{2\phi} \right)}.$$

Strömt der Dampf in eine so energisch wirkende Kondensationsvorlage, daß $P_2 = 0$ gesetzt werden kann, so ist

$$(11) \quad p_1 = \beta p_2,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen

$$(12) \quad \beta = e^{-\frac{\left(\frac{r^2 P}{16\eta} + \frac{r}{2\phi} \right) (P - \Delta P)}{760 D}}.$$

Die Gleichung (10) zeigt, daß auch bei Atmosphärendruck Gleichung (3) nicht streng erfüllt sein kann, es müßte denn $D=0$ sein.

Die Methoden zur Bestimmung des Siedepunktes oder der Spannkraft gesättigter Dämpfe beruhen auf der Annahme, daß Gleichung (3) zu recht besteht, daß also ein einfaches Gleichgewicht zwischen den Totaldrucken besteht. Die Gleichung (10) zeigt, daß diese Voraussetzung mit um so größerer Annäherung erfüllt ist, je größer $(P_1 + P_2)/2$ und je größer r ist. Daß die Siedepunktmethode bei großen Drucken, z. B. Atmosphärendruck, brauchbare Werte liefert, ist bekannt. Damit die Methode auch bei stark verminderten Drucken mit Hilfe der sogenannten künstlichen Atmosphäre brauchbare Werte liefert, muß, wie aus Gleichung (10) hervorgeht, r groß sein, d. h. das Verbindungsrohr zwischen Siedegeß und Rückflus-kühler muß möglichst weit sein.

Ist r sehr klein, so gilt Gleichung (3) nicht mehr und ein einfaches Gleichgewicht zwischen den Totaldrucken ist nicht mehr vorhanden. Wir bekommen die Verhältnisse, wie sie bei der Transpiration und Analyse durch feste Scheidewände mit kleinen Poren, z. B. eine Tonzelle, bekannt sind. Das Glied mit η verschwindet in den Gleichungen (9) und (10), und die hindurchtretenden Mengen sind der Größe ϑ und damit auch der Quadratwurzel aus der Dichte umgekehrt proportional. Die Bewegung der Gase richtet sich nicht mehr nach dem Totaldruck, sondern nach den Partialdrucken. Die selektive Durchlässigkeit der Tonzelle für leichte Gase beruht demnach nur auf der Kleinheit der Poren und ist nicht eine besondere Eigenschaft des Materials. Um dies anschaulich demonstrieren zu können, habe ich den Apparat Fig. 3 konstruiert. T ist eine Tonzelle, welche durch das Manometer n geschlossen ist. Bringt man in die T überfangende Glasglocke G etwas Leuchtgas, so zeigt n einen Überdruck in der Tonzelle wie bekannt an. Die gleiche Erscheinung erhält man nun ebenfalls, wenn auch nicht in so starkem Maße, wenn man die Tonzelle ersetzt durch einen Metallzylinder A , auf dessen präzis gearbeiteten oberen Rand der Metalldeckel B gesetzt ist. Füllt man die A überfangende Glasglocke G' mit Leuchtgas, so dringen die leichten Gase durch den sehr feinen Spalt zwischen A und B ein und verursachen einen Ausschlag an dem Manometer n' . Der Ausschlag bleibt aus, wenn man den Spalt verbreitert, indem man z. B. ein dünnes Blättchen Papier zwischen A und B legt und den Versuch wiederholt, weil nach Gleichung (10) das Gleichgewicht zwischen den Totaldrucken nur bei sehr kleinem Radius, resp. sehr enger Spaltöffnung gestört ist.

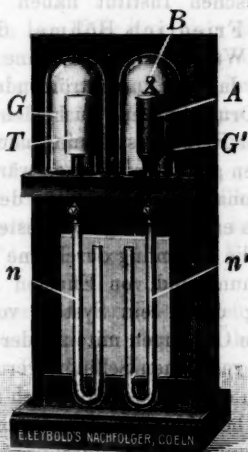


Fig. 3.

Die Voraussetzung, daß die Strömung durch eine Tonzelle gleichwertig sei der Strömung durch ein System von Kapillaren, trifft nicht streng zu. Im hiesigen technisch-physikalischen Institut haben die Herren Albert Mössner † und Friedrich Böhmel die Strömung von Sauerstoff und von Wasserstoff durch eine Tonzelle untersucht. Es zeigte sich, daß die durchströmenden Mengen nicht proportional sind der Druckdifferenz zu beiden Seiten der Tonzelle, was bei einfacher Reibungsströmung nach Gleichung (9) für $\Delta P = 0$ zu erwarten gewesen wäre. Die Abweichungen von der Proportionalität, entsprachen den von Knudsen¹⁾ bei der Effusion durch enge Öffnungen angestellten Beobachtungen. Daraus folgt, daß die Strömung durch eine Tonzelle ein Gemisch von Reibungsströmung und von Effusion ist und gleichwertig ist der Strömung durch ein System von Hohlräumen, die durch kurze kleine Öffnungen miteinander verbunden sind. Wenn auch die oben gegebenen Schlußfolgerungen über die Natur der Atmolyse durch eine Tonzelle dadurch nicht beeinflußt werden, so müßten doch bei einer genauen numerischen Behandlung die besonderen Strömungsgesetze durch eine Tonzelle berücksichtigt werden. Leider ist durch den Ausbruch des Krieges die Fortsetzung der genannten Untersuchung verhindert. Hr. Albert Mössner fand den Heldentod am 19. August 1914 in einem Gefecht bei Tagsdorf.

Ist $(P_1 + P_2)/2$ sehr klein, so zeigt Gleichung (10), daß im Vakuum, auch wenn r groß ist, d. h. bei gewöhnlichen Leitungsröhren dieselben Verhältnisse bezüglich der Transpiration und Atmolyse bestehen müssen, wie sie in höheren Drucken bei porösen Membranen beobachtet werden. Verschwindet dann das η enthaltende Glied, und vernachlässigen wir den Diffusionsgegendruck ΔP und den kleineren Druck P_2 , so können wir Gleichung (11) und (12) in die Form bringen:

$$\frac{P_2}{P_1} = e^{\frac{rP}{1520 D \vartheta}} = 1 + \frac{rP}{1520 D \vartheta} + \dots$$

Für Quecksilberdampf von 18° ist $\vartheta = 4,2 \cdot 10^{-5}$ und $P = 0,001$ mm. Für die Diffusionskonstante von Quecksilberdampf gegen Luft geben uns die obigen Messungen für 18° den Wert $D = 0,12$. Setzen wir diese Werte ein und berück-

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 28. p. 999. 1909.

sichtigen wir nur das erste Glied der Reihe, so erhalten wir die Gleichung:

$$(13) \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + 0,13 \cdot r.$$

Ist z. B. ein MacLeod durch ein Rohr von dem Radius $r = 0,4$ cm verbunden mit einem in flüssiger Luft befindlichen Absorptionsgefäß, so ist der Partialdruck p_2 der Luft in dem an das Kühlgefäß angeschlossenen Rezipienten nach Gleichung (13) um rund 5% größer als der Partialdruck p_1 der Luft in dem MacLeod.

Ersetzen wir das MacLeod durch eine Quecksilberluftpumpe, so ist ebenfalls der Partialdruck der Luft in dem Rezipienten um 5% größer als in dem Toricellischen Vakuum der Quecksilberpumpe.

Bei Wasserstoff ist der Unterschied viermal so klein. Ist z. B. der Partialdruck des Wasserstoffes in der Quecksilberluftpumpe 0,00001 mm, so ist der Partialdruck im Rezipienten gleich 0,0000101 mm. Der Totaldruck in der Pumpe ist um den Partialdruck des Quecksilberdampfes vermehrt, ist also $p = 0,00101$ mm. Im Rezipienten können wir den Sättigungsdruck des Quecksilberdampfes bei -180° gegenüber diesen Zahlen vernachlässigen. Der Totaldruck in dem Rezipienten ist gleich dem Partialdruck des Wasserstoffes, also $p = 0,0000101$ mm. Der Totaldruck in der Pumpe ist somit 100 mal so groß als wie der Totaldruck in dem daran angeschlossenen Rezipienten.

Damit ist gezeigt, daß man auch dann mit einer Quecksilberluftpumpe Vakua erzeugen und mit dem MacLeod Drucke messen kann, wenn der Totaldruck in dem evakuierten Raum bedeutend kleiner ist als die Spannkraft des Quecksilberdampfes. Es ist nicht zulässig aus Gleichung (3) Schlüsse auf die mit Quecksilberluftpumpen erzielbaren Minimaldrucke zu ziehen. Die oben zitierte Behauptung aus dem Lehrbuch von Müller-Pouillet ist hiermit widerlegt.

4. Praktische Anwendung der Diffusion zur Erzeugung einer mechanischen Saugwirkung.

Die Ausführungen im letzten Abschnitt zeigen, daß bei der Diffusion der Gase und Dämpfe die Totaldrucke an beiden Enden der Diffusionsröhre nicht notwendig gleich sein müssen. Nach

Gleichung (10) sind die Totaldrucke um so mehr verschieden, je kleiner die Drucke an sich sind und je kleiner der Radius der Röhre ist. Bei Hochvakuumpumpen werden diese Diffusionsvorgänge von praktischer Bedeutung, weil dieselben es ermöglichen einen Gleichgewichtszustand zwischen den Drucken im Rezipienten und der Pumpe herbeizuführen, bei welchem der Totaldruck in dem Rezipienten um das Vielfache kleiner ist als in der Pumpe. Einen Schritt weiter bedeutet es, wenn wir die Diffusion der Gase so wirken lassen, daß nicht nur die Totaldrucke sondern auch die Partialdrucke kleiner sind als in der Luftpumpe, und somit als letzte Konsequenz die Luftpumpe überhaupt überflüssig wird.

Um das hier gegebene Problem behandeln zu können, berechnen wir die Diffusion unter der Voraussetzung, daß nicht nur der Dampf, sondern auch das Gas durch die Kapillare strömt. Der größeren Einfachheit und besseren Übersichtlichkeit wegen wollen wir annehmen, daß der Radius r der Kapillare so eng sei, daß wir in Gleichung (9) das Glied mit der vierten Potenz von r gegenüber dem Glied mit der dritten Potenz von r vernachlässigen können. Ferner sei angenommen, daß auf der einen Seite der Kapillare der Dampfdruck gleich P_1 , der Gasdruck dagegen dauernd gleich Null sei, indem die etwa eintretende Luft durch einen kräftigen, luftfreien Dampfstrom fortgerissen wird. Auf der anderen Seite der Kapillare sei in dem angeschlossenen Gefäß der Gasdruck p_2 und der Dampfdruck sei $P_2 = 0$, indem der Dampf durch eine energisch wirkende Kühlvorlage kondensiert wird. Schließlich sei p_2 klein gegenüber P_1 , so daß bei der Bewegung des Dampfes der durch die Luft verursachte Diffusionsgegendruck ΔP vernachlässigt werden kann, während umgekehrt bei der Bewegung der Luft der Diffusionsgegendruck im Dampfe wohl zu berücksichtigen ist. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir für die Menge g_1 der strömenden Luft

$$g_1 = \frac{M_1}{R T_1 L} \frac{\pi r^3}{2 \vartheta_1} (P_2 - \Delta P)$$

und für die Menge g_2 des strömenden Dampfes

$$g_2 = \frac{M_2}{R T_2 L} \frac{\pi r^3}{2 \vartheta_2} P_1.$$

Mit Gleichung (5) und (7) erhalten wir

$$g_1 = \frac{M_1}{R T_1 L} \frac{\pi r^3}{2 \vartheta_1} p_2 e^{-\frac{\vartheta_2 R T_1 L}{760 D q M_2}}$$

oder

$$(14) \quad g_1 = \frac{M_1}{R T_1 L} \frac{\pi r^3}{2 \vartheta_1} p_2 e^{-\frac{r P_1}{760 D^2 \vartheta_1}},$$

wenn wir $q = \pi r^2$ setzen. Bezeichnen wir das per Sekunde bei dem Druck p_2 einströmende Gasvolumen mit V , so daß die Beziehung besteht

$$g_1 = V p_2 \frac{M_1}{R T_1}$$

so ist bei n parallel geschalteten Röhren

$$V = \frac{n}{L} \frac{\pi r^3}{2 \vartheta_1} e^{-\frac{r P_1}{1520 D^2 \vartheta_1}}.$$

Ist r sehr klein, wie oben angenommen war, so vereinfacht sich dieser Ausdruck, indem das Exponentialglied gleich der Einheit wird, und man erhält

$$(15) \quad V = \frac{n}{L} \frac{\pi r^3}{2 \vartheta_1}.$$

Gleichung (15) sagt aus, daß per Sekunde ein Gasvolumen durch die Kapillaren strömt, das unabhängig ist vom Gasdruck p_2 selbst. Somit wird der Gasdruck p_2 in dem angeschlossenen Gefäß in jeder Sekunde um den gleichen Bruchteil herabgesetzt. Diese Vorrichtung wirkt somit analog einer Luftpumpe, so daß wir die Größe V als die Sauggeschwindigkeit der „Diffusionsluftpumpe“ bezeichnen können.

Um die aus Gleichung (15) zu ziehenden Folgerungen praktisch prüfen zu können, verwendete ich eine Tonzelle, welche von Wasserdampf bei Atmosphärendruck umspült wurde. P_1 war somit 740 mm. Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 4. Im Gefäß A wird Wasserdampf erzeugt und in die Glocke B geleitet. Unter der Glocke befindet sich eine Tonzelle C , welche durch den Kühler D abgeschlossen ist. a und b sind die Zu- und Abflußöffnungen des Kühlers für kaltes Wasser. Die Röhre d führt zu dem Zwischenraum zwischen Kühler und Tonzelle und ermöglicht den Abfluß des am Kühler konden-

sierten Wassers in das Gefäß *E*. Das Ansatzrohr an dem Gefäß *E* ist durch das Quecksilber *Q* abgeschlossen. Der Dampf umspült den Tonzylinder *C* und tritt bei *c* aus der Glocke *B* an die freie Atmosphäre. Ein Teil des Dampfes diffundiert durch die Poren des Tonzylinders und kondensiert am Kühler *D*. Damit die Poren des Tonzylinders sich nicht

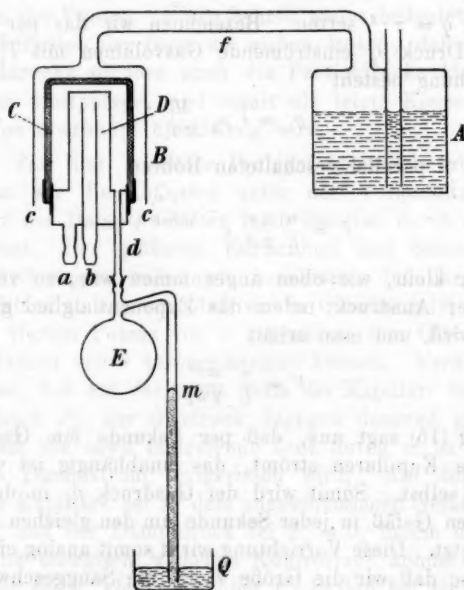


Fig. 4.

mit Kondenswasser verstopfen, wird der Dampf durch einen bei *f* befindlichen Brenner überhitzt. Gleichzeitig diffundiert die im Tonzylinder enthaltene Luft in entgegengesetzter Richtung wie der Dampf durch Poren der Tonzelle in den luftfreien Dampfraum der Glocke *B* und wird durch den strömenden Dampf an die Atmosphäre gespült. Entsprechend Gleichung (15) wirkt diese Vorrichtung als Pumpe und das Quecksilber bei *Q* steigt langsam bis nahezu Barometerhöhe nach *m*. Die Differenz des Standes von *m* über *Q* und des

Barometerstandes war gleich der 15 mm betragenden Spannkraft des Wasserdampfes bei der Temperatur des Kühlwassers in *D*. Dieser Versuch zeigt zum erstenmal, daß man ohne Bewegung von festen oder flüssigen Kolben nur durch Diffusion der Dämpfe und Gase eine kontinuierliche Saugwirkung erhalten kann.

Kombiniert man die Tonzelle mit einer Wasserstrahlpumpe und friert man die diffundierenden Wasserdämpfe bei -80° (Kohlensäure-Äthermischung) aus, so erhält man niedrigere Drucke, als wie die Wasserstrahlpumpe allein zu geben

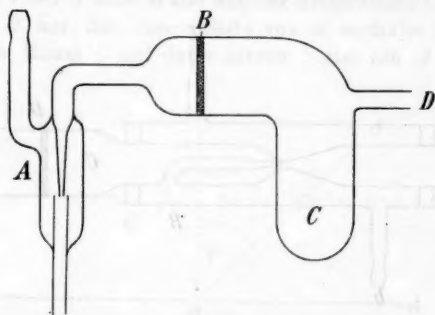


Fig. 5.

imstande ist. *A* in Fig. 5 ist die Wasserstrahlpumpe, *B* ist die eingekittete Tonwand, *C* ist auf -80° gekühlt, *D* führt zum Manometer. Während der Druck bei *A* 15 mm war, zeigte das an *D* angeschlossene Manometer 1 mm. Daraus folgt, daß der bei *A* gemessene Druck zusammengesetzt war aus 14 mm Wasserdampfdruck und 1 mm Gas (Luft). Bei diesem Versuch ist die Voraussetzung, daß die Verbindungsröhre, in welcher der Dampf von *A* nach *C* strömt, so weit ist, daß der strömende Dampf kein merkliches Druckgefälle in der Luft erzeugt.

Will man noch höhere Vakua als 1 mm erhalten, so muß die Luft von 1 mm Partialdruck durch einen Dampfstrom nach der Wasserstrahlpumpe *A* zurückgetrieben werden. In Fig. 6 ist *A* die Wasserstrahlpumpe. Der bei *a* zugeleitete, luftfreie Dampf strömt zum Teil bei *b* wieder aus, zum Teil tritt er durch die Düse *B* in den evakuierten Apparat

ein und spült in Form eines energischen Dampfstrahles alle Gase zu der als Einspritzkondensator wirkenden Wasserstrahlpumpe *A*. Infolgedessen ist der Raum *C* mit luftfreiem Dampf von ca. 10 mm Druck angefüllt. Aus dem Raum *E* und der an die Röhre *F* angeschlossenen Röntgenröhre können die letzten Luftreste durch das Diaphragma *D* in dem Raum *C* diffundieren. Die in entgegengesetzter Richtung durch *D* diffundierenden Wasserdämpfe werden bei *E* ausgefroren, indem das Ansatzrohr *E* in eine Kohlensäure-Äther-Kältemischung eingetaucht ist. Die bei *F* aufgesetzte

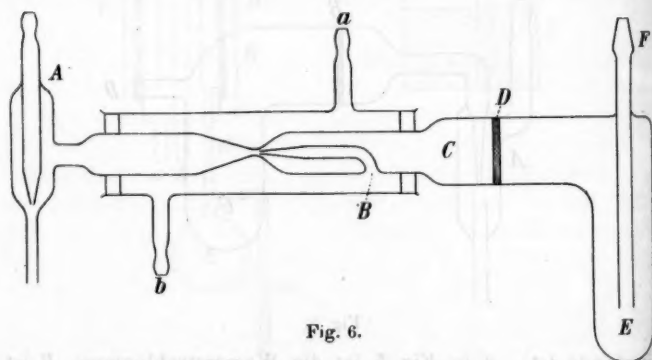


Fig. 6.

Röntgenröhre gab harte Röntgenstrahlen, nachdem die beschriebene Vorrichtung 2 Stunden in Tätigkeit war. Diese Vorrichtung ermöglicht es somit die einfache Wasserstrahlpumpe in eine Hochvakuumpumpe umzuwandeln. Statt der Wasserstrahlpumpe ist natürlich bei dieser Vorrichtung ebenso gut die Diffusionspumpe Fig. 4 verwendbar, so daß das hohe Vakuum allein durch Diffusion erzeugt werden kann.

Bei aller Einfachheit haben diese Pumpen einen großen Fehler, nämlich die sehr langsame Sauggeschwindigkeit. Aus Gleichung (15) erkennen wir, daß die Sauggeschwindigkeit V vergrößert werden kann entweder durch Vergrößerung von n , oder durch Verkleinerung von L . Einer Vergrößerung von n entspricht eine Vergrößerung der Oberfläche des Diaphragmas, resp. der Anzahl der Tonzylinder. Einer Verkleinerung von L entspricht eine geringere Wanddicke des Diaphragmas. Kon-

vergiert L gegen O , so wächst V bis ∞ . Dies etwas unwahrscheinliche Resultat läßt schon erkennen, daß die Gleichung (15) für sehr kleine L offenbar keine Gültigkeit mehr hat. Die hydrodynamische Berechnungsweise versagt für diesen praktisch sehr wichtigen Fall und wir wollen deshalb die Bewegung der Moleküle durch eine enge Öffnung rechnerisch verfolgen.

5. Theorie der Gegenströmung von Gas und Dampf durch eine enge Öffnung.

In Fig. 7 sei A eine Wand mit der kreisrunden Öffnung q . Der Raum B auf der einen Seite von A enthalte luftfreien Dampf. Der Raum C auf der anderen Seite von A enthalte

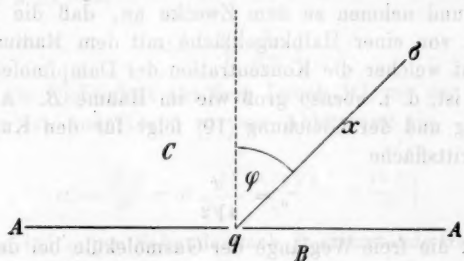


Fig. 7.

ein Gas in geringer Verdünnung. Der bei q ausströmende Dampf werde in das Unendliche oder auf eine auf sehr niedriger Temperatur gehaltene Wand geleitet, so daß außer den von q ausschließenden Molekülen keine Dampfmoleküle im Raum C sich bewegen. Die Zahl der bei q per Sekunde austretenden oder eintretenden Moleküle ist dann¹⁾

$$(16) \quad Z = \frac{1}{4} q N \Omega,$$

wenn N die Anzahl der Moleküle per Kubikzentimeter und Ω die mittlere Molekulargeschwindigkeit ist. Auf ein im Abstand x von q befindliches, senkrecht auf x stehendes Flächenelement σ mit den Ordinaten x und φ treffen per Sekunde

$$(17) \quad dZ = q N \Omega \frac{\sigma}{4\pi x^2} \cos \varphi$$

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 28. p. 999. 1909.

Moleküle auf. Die Molekülzahl per Kubikzentimeter $N_{(x\varphi)}$ bei σ ist, wenn d der Durchmesser der Öffnung q ist

$$(18) \quad N_{(x\varphi)} = \frac{dZ}{\sigma\Omega} = \frac{d^2 N \cos \varphi}{16x^3}$$

und die mittlere Dichte $N_{(x)}$ der Moleküle auf der q umgebenden Halbkugel von der Oberfläche $2\pi x^2$ ist mit Gleichung (16)

$$(19) \quad N_{(x)} = \frac{Z}{2\pi x^2 \Omega} = \frac{N d^2}{32x^3}.$$

Wir setzen zur Vereinfachung voraus, daß nicht nur in großer Entfernung, sondern auch in der Nähe von q die Moleküle sich auf strahlenförmigen Bahnen wie von einem Punkt aus bewegen und nehmen zu dem Zwecke an, daß die Moleküle senkrecht von einer Halbkugelfläche mit dem Radius x_0 ausgehen, auf welcher die Konzentration der Dampfmoleküle $N_{(x_0)}$ gleich N ist, d. i. ebenso groß wie im Raume B . Aus dieser Bedingung und der Gleichung (19) folgt für den Kugelradius der Austrittsfläche

$$(20) \quad x_0 = \frac{d}{4\sqrt{2}}.$$

Ist λ die freie Weglänge der Gasmoleküle bei den gegenseitigen Zusammenstößen der Gas- und Dampfmoleküle, so ist die Zahl dZ' der von σ auf die Durchtrittsfläche mit dem Kugelradius x_0 fliegenden Gasmoleküle

$$(21) \quad dZ' = q N' \Omega' \frac{\sigma}{4\pi x^2} \cos \varphi e^{-\int_{x_0}^x \frac{dx}{\lambda_{(x\varphi)}}},$$

wenn N' und Ω' die Konzentration und Molekulargeschwindigkeit der Gasmoleküle bei σ sind. Die freie Weglänge $\lambda_{(x\varphi)}$ können wir umgekehrt proportional der Konzentration $N_{(x\varphi)}$ der Dampfmoleküle setzen, da der Gasdruck klein ist gegenüber dem Dampfdruck. Mit Gleichung (18) ist dann

$$\lambda_{(x\varphi)} = \lambda \frac{N}{N_{(x\varphi)}} = \frac{16\lambda x^3}{d^2 \cos \varphi}.$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (21) ein, so erhalten wir für die Gesamtzahl aller aus dem Unendlichen auf die Durchtrittsfläche treffenden Gasmoleküle

$$Z' = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} q N' \Omega' \cdot e^{-\frac{d}{2\sqrt{2}\lambda} \left(\frac{4\sqrt{2}\lambda}{d} + \frac{16\lambda^2}{d^2} \right)} \cdot \cos \varphi \sin \varphi d\varphi$$

und integriert

$$(22) \quad Z' = \frac{1}{4} q N' \Omega' \left[\frac{16\lambda^2}{d^2} - e^{-\frac{d}{2\sqrt{2}\lambda} \left(\frac{4\sqrt{2}\lambda}{d} + \frac{16\lambda^2}{d^2} \right)} \right].$$

Ist N' klein und λ groß, was den praktisch vorkommenden Fällen entspricht, so gibt Gleichung (22) den Strömungsvorgang in genügender Vollkommenheit. Berücksichtigen wir, daß nach Maxwell

$$\Omega' = \sqrt{\frac{8}{\pi \rho_0}},$$

wenn ρ_0 die Dichtigkeit bei dem Druck 1 Dyne per Quadratcentimeter ist, und führen wir zur Abkürzung ein

$$(23) \quad \alpha = \frac{16\lambda^2}{d^2} - e^{-\frac{d}{2\sqrt{2}\lambda} \left(\frac{4\sqrt{2}\lambda}{d} + \frac{16\lambda^2}{d^2} \right)},$$

so ist das bei q per Sekunde nach B eintretende Gasvolum V gegeben durch

$$(24) \quad V = \frac{Z'}{N'} = \alpha \frac{q}{\sqrt{2\pi \rho_0}}.$$

Ist die freie Weglänge sehr groß im Vergleich zum Durchmesser, so wird $\alpha = 1$ und Gleichung (24) geht in den von Knudsen¹⁾ angegebenen Ausdruck über.

Wir haben hier angenommen, daß der Raum B vollständig gasfrei sei. Stellen wir den gasfreien Dampfraum durch Sieden einer Flüssigkeit mit Rückflußkühler her, so ist nach Gleichung (11) und (12) stets noch eine bestimmte, wenn auch sehr kleine Gasmenge mit dem Partialdruck p_1 im Dampfraum vorhanden, wenn der Gasdruck im Rückflußkühler p_2 ist. Das im Raum B unter dem Partialdruck p_1 befindliche Gas strömt in gleicher Richtung wie der Dampf durch die Öffnung q nach C , so daß wir den Einfluß der Zusammenstöße mit

1) M. Knudsen, l. c.

den Molekülen des Dampfes bei diesem Korrektionsglied vernachlässigen können. Das durch q strömende Volumen gibt in diesem Falle Gleichung (24) für $\alpha = 1$, so daß die durch q von B nach C strömende Gasmenge bei Beachtung von Gleichung (11) ist

$$(25) \quad p_1 V' = p_1 \frac{q}{\sqrt{2\pi} q_0} = \beta p_2 \frac{q}{\sqrt{2\pi} q_0},$$

während die von C nach B durch q strömende Gasmenge, wenn p der Druck des Gases in dem Raume C ist, nach Gleichung (24) gegeben ist durch

$$(26) \quad p V = p \alpha \frac{q}{\sqrt{2\pi} q_0}.$$

Die von C nach B strömende Gasmenge ist gleich der Differenz der Gas Mengen $p_1 V'$ und $p V$. Setzt man

$$S = \frac{p V - p_1 V'}{p},$$

so ist S die tatsächlich vorhandene Sauggeschwindigkeit. Mit Gleichung (25) und (26) ist

$$(27) \quad S = \frac{q}{\sqrt{2\pi} q_0} \left(\alpha - \frac{p_2}{p} \beta \right).$$

Wird an der Öffnung q die Luft nicht vollkommen weggespült, sondern nimmt der strömende Dampf nur den Anteil k der bei q befindlichen Luft mit, so ist die Sauggeschwindigkeit

$$(28) \quad S = \frac{q}{\sqrt{2\pi} q_0} \left(k \alpha - \frac{p_2}{p} \beta \right).$$

Die Koeffizienten α und β sind durch die Gleichungen (23) und (12) bestimmt.

Der Wert für die in den Gleichungen verwendeten freien Weglänge der Moleküle ist verschieden von dem üblichen Wert, weil es ja nur auf die freie Weglänge ankommt, welche zwei in genau entgegengesetzter Richtung sich bewegende Molekülschwärme haben. Strömt Luft gegen Quecksilberdampf und ist Ω_1 die Geschwindigkeit der Luftmoleküle, Ω_2 die der Quecksilbermoleküle, N_2 die Anzahl Quecksilbermoleküle per Kubik-

zentimeter, und die gemeinsame Wirkungssphäre nach Stephan $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$, wenn σ_1 die Wirkungssphäre des Luftmoleküls, σ_2 die des Quecksilbermoleküls ist, so ist die Anzahl Quecksilbermoleküle, welche in dem zylindrischen, von der gemeinsamen Wirkungssphäre per Sekunde durchlaufenen Raum sich befinden

$$N_2 \pi \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 (\Omega_1 + \Omega_2)$$

und die freie Weglänge der Luftmoleküle in dem Quecksilberdampf

$$\lambda = \frac{4}{N_2 \pi (\sigma_1 + \sigma_2)^2} \frac{\Omega_1}{\Omega_1 + \Omega_2}.$$

Bezeichnen wir in Luft resp. Quecksilberdampf die innere Reibung mit η_1 resp. η_2 , die Dichtigkeit mit ϱ_1 resp. ϱ_2 , das Molekulargewicht mit M_1 resp. M_2 und beachten wir das nach Maxwell, wenn wir die Indizes weglassen,

$$\eta = \frac{0,3097}{\sqrt{2}} \frac{\varrho \Omega}{N \pi \sigma^2},$$

so erhalten wir für die freie Weglänge der Luftmoleküle zwischen den Quecksilbermolekülen die Beziehung

$$(29) \quad \lambda = \frac{4 \sqrt{2}}{0,31} \frac{\eta_2}{\varrho_2 (\Omega_1 + \Omega_2)} \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{1}{\left(1 + \sqrt{\frac{M_1 \eta_2 \Omega_1}{M_2 \eta_1 \Omega_2}} \right)^2}.$$

Wir setzen für Luft von Zimmertemperatur $\eta_1 = 0,00019$ und $\Omega_1 = 46700$ und für Quecksilberdampf von 100°C . $\eta_2 = 0,00027$ und $\Omega_2 = 19800$. Wegen der geringen Zahl der Zusammenstöße bleiben die Molekulargeschwindigkeiten auf der ganzen in Betracht kommenden Flugstrecke erhalten, d. h. es gibt beim Ausströmen im hohen Vakuum keine adiabatische Abkühlung. Durch Einsetzen dieser Zahlenwerte in Gleichung (29) erhalten wir $\lambda = 0,023 \text{ cm}$ bei $0,3 \text{ mm}$ Druck.

Die Funktion α ist durch Fig. 8 graphisch dargestellt, indem als Abszissen der Quotient λ/d , als Ordinate α aufgetragen ist. Beim Werte 0 beginnend steigt α mit wachsendem λ/d und nähert sich asymptotisch dem Grenzwert $\alpha = 1$ für $\lambda/d = \infty$. Fig. 9 gibt den Verlauf der Funktion β , mit β

als Ordinate und dem in Millimeter angegebenen Dampfdruck P des Quecksilberdampfes als Abszisse, indem in Gleichung (12) entsprechend den Verhältnissen bei den ausgeführten Pumpen

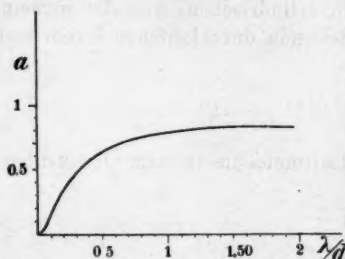


Fig. 8.

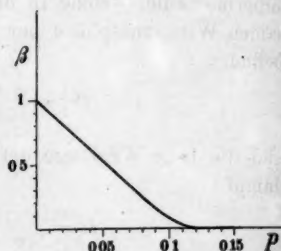


Fig. 9.

$r = 1$ cm, $\eta = 0,00027$, $D = 0,21$ (bei 110°), $p_2 = 0,1$ mm und $\Phi = 5,6 \cdot 10^{-5}$ gesetzt ist, unter der Annahme, daß die Reflexionsgesetze¹⁾ an der Gashaut für Quecksilber die gleichen sind wie für Wasserstoff. Bei steigendem Dampfdruck sinkt β vom Werte 1 herab bis zum Werte 0 für $P = \infty$. Von dem Drucke $P = 0,12$ an sinkt β auf verschwindend kleine Werte. Fig. 10 gibt die nach Gleichung (27) berechneten Werte

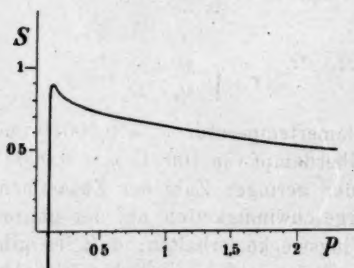


Fig. 10.

bei einer kreisrunden Öffnung q vom Durchmesser $0,1$ mm und für $p = 0,01$ mm, indem als Ordinate die Sauggeschwindigkeit S und als Abszisse der Quecksilberdampfdruck P aufgetragen ist. Die Sauggeschwindigkeit ist ein Maximum, wenn der Dampfdruck den Vorvakuumdruck nur wenig übersteigt. Ist der Dampfdruck gleich oder kleiner, so dringt Luft aus dem Vorvakuum zurück, wir erhalten eine negative Sauggeschwindigkeit, die Kurve fällt rasch unter die Nulllinie. Bei zunehmendem Dampfdruck nimmt die Sauggeschwindigkeit eben-

druck gleich oder kleiner, so dringt Luft aus dem Vorvakuum zurück, wir erhalten eine negative Sauggeschwindigkeit, die Kurve fällt rasch unter die Nulllinie. Bei zunehmendem Dampfdruck nimmt die Sauggeschwindigkeit eben-

1) W. Gaede, Ann. d. Phys. 41. p. 289. 1913.

falls langsam ab, weil mit wachsendem Druck λ/d und somit auch α kleiner wird. Man erhält die beste Saugwirkung, wenn die lineare Abmessung der Öffnung q von der Größenordnung der freien Weglänge der Moleküle ist.

6. Konstruktion und Leistung der Diffusionsluftpumpe.

Bei der praktischen Ausführung der Diffusionspumpe wurde der theoretischen Forderung, daß der Querschnitt q der Diffusionsöffnung möglichst groß und das Verhältnis d/λ möglichst klein sein soll, in der Weise genügt, daß nicht eine kreisrunde Öffnung, sondern ein schmaler Spalt verwendet wurde. Außerdem wurde als verdampfende Flüssigkeit Quecksilber genommen, weil die Spannkraft des Quecksilberdampfes bei Zimmertemperatur einen sehr kleinen Wert besitzt.

Fig. 11 läßt die Teile der Diffusionspumpe erkennen. Das Quecksilber Q wird durch den Brenner F erhitzt. Der Quecksilberdampf in A strömt in der Pfeilrichtung durch den Stahlzylinder b und das Rohr a nach dem Rückflußkühler c . Das Kühlwasser wird bei m zugeleitet, bei n abgeführt. Die kondensierten Quecksilbertropfen fließen nach Q zurück. Der Stahlzylinder b ist in die mit Quecksilber gefüllte Rinne d eingesetzt. Dadurch ist der Raum A von dem Raum B abgeschlossen.

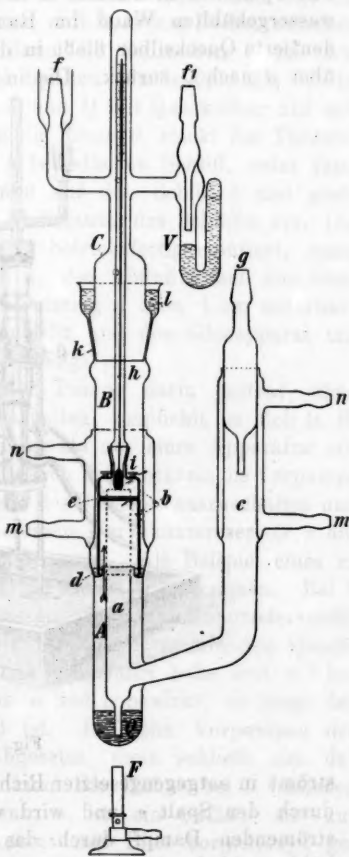


Fig. 11.

Eine Kommunikation zwischen *A* und *B* besteht nur durch den Spalt *e* in dem Stahlzylinder *b*. Der Dampf strömt durch den Spalt aus dem Raum *A* in den Raum *B* und wird an der wassergekühlten Wand im Raum *B* kondensiert. Das kondensierte Quecksilber fließt in die Quecksilberrinne *d* und läuft über *d* nach *Q* zurück. Die in dem Raum *B* befindliche Luft

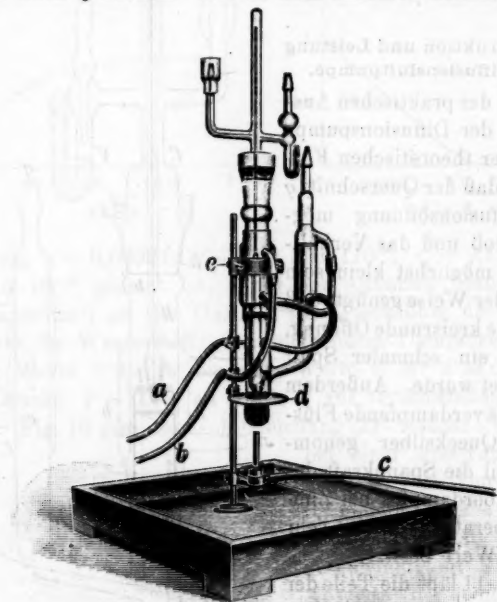


Fig. 12.

strömt in entgegengesetzter Richtung wie der Quecksilberdampf durch den Spalt *e* und wird von dem in der Pfeilrichtung strömenden Dampf durch das Rohr *a* und den Rückflüßkühler *c* hindurch der bei *g* angeschlossenen Vorrakuumpumpe zugeführt. Auf diese Weise entsteht in dem Raume *B* und in dem bei *f* angeschlossenen Rezipienten eine Luftleere.

Da die Theorie gezeigt hat, daß die Saugwirkung bei einem bestimmten Dampfdruck des Quecksilbers ein Optimum ist (Fig. 10) ist an der Diffusionspumpe das Thermometer *h* an-

gebracht, dessen Kugel an dem oberen, offenen Ende der Röhre *a* sich befindet. Die Pumpe wird in Betrieb gesetzt, indem man den Spalt auf eine bestimmte Weite einstellt. Man legt ein Stahlplättchen passender Dicke, z. B. 0,04 mm Dicke, zwischen die Spaltränder und zieht dann die Schrauben *i* an. Am besten verwendet man zwei Spalten von je 0,04 mm Weite. Man gießt den Apparat bei *d* und *Q* mit Quecksilber auf und setzt dann den Zylinder *b* in die Rinne *d*, steckt das Thermometer *h* in den oberen, in *b* befindlichen Schliff, setzt dann den oberen Teil *C* der Pumpe auf den Schliff *k* und gießt dann bei *l* Quecksilber zur Abdichtung des Schliffes ein. Die Pumpe ist, wie Fig. 12 zeigt, betriebsfertig montiert, wenn man noch den Wasserzufluß *a*, den Abfluß *b* und den Gas Schlauch *c* anschließt, den Schutzring *d* etwa 1 cm unterhalb der Quecksilberoberfläche einstellt und den Glasapparat mit dem Ring *e* an dem Stativ befestigt.¹⁾

Da der Hauptvorzug der Pumpe darin besteht, ohne mechanische Bewegung zu arbeiten, empfiehlt es sich (z. B. zur Entfernung der letzten Gasreste aus einer Apparatur mit Hilfe der Diffusionspumpe) die durch die mechanische Vorpumpe gegebene Komplikation während des Betriebes auszuschalten und die abgesogenen Gase sich in einem Vorvakuumreservoir *c* ansammeln zu lassen, wie Fig. 13 zeigt. Als Beispiel eines zu evakuierenden Apparates ist die Röhre *a* genommen. Bei *b* wird die Vorpumpe angeschlossen. *V* ist das Manometerventil, welches ich zum ersten Male bei meiner rotierenden Quecksilberluftpumpe angegeben und eingeführt habe und welches eine direkte Verbindung von *a* und *c* bewirkt, so lange der Vorvakuumdruck noch groß ist. Ist beim Vorpumpen der Druck in *c* genügend herabgesetzt, dann schließt sich das Quecksilberventil und man kann die Hähne bei *b* schließen und die Vorpumpe abstellen. *e* ist ein Gefäß, das zur Trockenhaltung des Vorvakuums mit Phosphorpentoxyd gefüllt wird. Zur Verbindung von *c* und *g* verwendet man entweder einen Gummischlauch, wie in Fig. 13, oder besser eine mit Siegelack eingekittete Glasröhre, wenn die Apparatur sehr lange dicht halten soll, z. B. bei Verwendung von Edelgasen.

1) Die Firma E. Leybolds Nachfolger in Cöln hat allein das Herstellungs- und Verkaufsrecht der Diffusionsluftpumpe D.R.P. angemeldet.

Will man die Wirkung der Pumpe einem großen Hörerkreis demonstrieren, so empfiehlt es sich noch einen Hahn *h* (Fig. 13) anzubringen und diesen durch einen Gummischlauch mit *g* zu verbinden. Bei geöffnetem Hahn ist in der Röhre *a* der Druck nahezu gleich dem Druck im Vorvakuum (0,1—0,3 mm Hg). Schließt man den Hahn *h*, so erkennt man

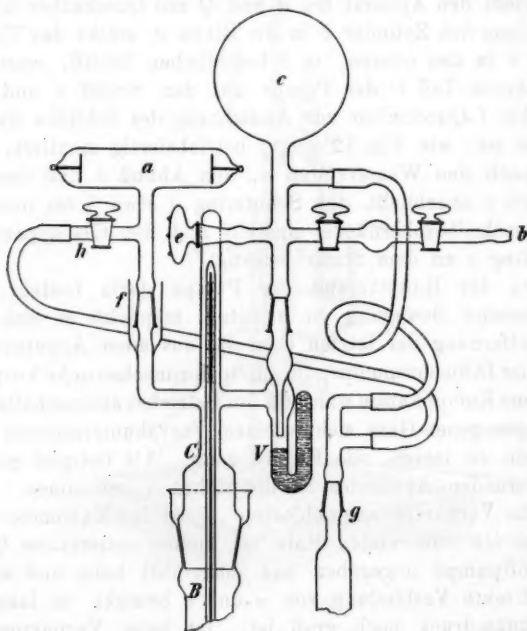


Fig. 13.

an den bekannten Änderungen im Aussehen der Entladung, wie rasch die Diffusionspumpe die Röhre *a* evakuiert. Für wissenschaftliche Untersuchungen ist es dagegen besser, den Hahn *h* fortzulassen und konsequent alle Fetthähne und Fettschliffe zu vermeiden, was die Pumpe leicht ermöglicht. Alle Hochvakuumschliffe der Pumpe sind mit Quecksilber abgedichtet. Diese Quecksilberabschlüsse halten sehr gut dicht, wenn man nur darauf achtet, daß das Glas und das Quecksilber gut rein, or allem fettfrei ist.

Um die Saugleistung der Pumpe zu prüfen, wurde an dem Schliff f (Fig. 11 u. 13) ein 3,5 l fassender Rezipient und ein Mac Leod'sches Manometer angeschlossen und durch Öffnen eines Hahnes die Verbindung zwischen Pumpe und Rezipient für eine bestimmte Zeit hergestellt, in welcher der Druck etwa auf die Hälfte abnahm. Aus der Beobachtung wurde die Sauggeschwindigkeit S nach der Gleichung

$$S = \frac{V}{t} \lg \text{nat} \frac{p_1}{p_2}$$

ermittelt¹⁾, wie bei der Molekularluftpumpe. Alle Beobachtungen wurden mit Luft durchgeführt, das Vorvakuum betrug 0,1 mm und wurde mit der Kapselluftpumpe, welche die Firma E. Leybolds Nachf. in Köln nach meiner Angabe verfertigt, erzeugt. Die Tab. V gibt die Resultate, welche mit einem Spalt von 0,12 mm Breite (es waren 3 Plättchen von je 0,04 mm Dicke eingelegt) bei verschiedenen Temperaturen erhalten wurden. T ist die Temperatur des Quecksilberdampfes und P der zugehörige Druck in Millimeter Quecksilbersäule. S ist die Sauggeschwindigkeit, beobachtet bei einem mittleren Druck $p = 0,01$ mm. Man sieht, daß die Sauggeschwindigkeit bei $T = 99^\circ$ ein Maximum hat.

Tabelle V.

T	P	S	T	P	S
90°	0,165	13,4	118,5°	0,72	51
94°	0,20	60	127,5°	1,10	38
97°	0,24	70	134°	1,51	23
99°	0,27	80	139°	1,84	15
113°	0,55	62	143,5°	2,2	11

Die Tab. VI, VII, VIII geben die Abhängigkeit der Sauggeschwindigkeit S von der Höhe des erzeugten Vakuums, also vom mittleren Druck p , bei welchem S beobachtet wurde. Bei den Beobachtungen in Tab. VI wurden zwei Spalte von je 0,12 mm Breite verwendet und die Temperatur war 106°. Tab. VII gibt die Beobachtung mit zwei Spalten von je 0,04 mm Breite und bei einer Temperatur von 103°. Tab. VIII mit einem Spalt von 0,04 mm Breite bei der Temperatur 110°.

1) W. Gaede, Ann. der Phys. 41. p. 365. 1913.

Tabelle VI.

2 Spalte 0,12 mm

p	S
0,025	77
0,009	72
0,0025	67
0,0008	72
0,0002	73
0,00006	70

Tabelle VII.

2 Spalte 0,04 mm

p	S
0,025	66
0,008	65
0,0025	65
0,0009	64
0,0003	61
0,0001	63
0,00003	70
0,00001	63

Tabelle VIII.

1 Spalt 0,04 mm

p	S
0,07	52
0,028	48
0,012	44
0,006	40
0,003	41
0,0015	38
0,0007	42
0,0004	41
0,00017	53
0,00007	40

Diese Tabellen zeigen das auffallende Resultat, daß die Sauggeschwindigkeit auch im höchsten Vakuum immer noch denselben Wert behält, was bisher noch bei keiner Pumpe beobachtet wurde. Die von mir angegebene rotierende Quecksilberluftpumpe hat bei $p = 10$ mm eine Sauggeschwindigkeit $S = 140$ ccm pro Sekunde und dieser Wert nimmt mit fortschreitendem Vakuum ab und konvergiert bei $p = 0,00001$ mm gegen $S = 0$. Die mittlere Sauggeschwindigkeit der rotierenden Quecksilberluftpumpe und der Diffusionsluftpumpe sind für Luft von gleicher Größenordnung. Die Molekularluftpumpe und alle übrigen Pumpen zeigen ebenfalls eine Abnahme von S bei abnehmendem p . Die beobachtete Unabhängigkeit der Werte S von p bei der Diffusionspumpe steht in guter Übereinstimmung mit der Theorie, indem in Gleichung (27) S unabhängig von p ist, wenn nur β genügend klein, d. h. nach Gleichung (12) P genügend groß ist. Es ist selbstverständlich, daß die Apparatur keine Undichtigkeiten enthalten darf, weil sonst das Grenzvakuum bald erreicht ist und der Druck nicht weiter erniedrigt wird, wenn die durch die Undichtigkeit einströmende Gasmenge gleich der abgesogenen ist. Das gleiche gilt, wenn Teile der Pumpe, vor allem das Quecksilber, noch nicht gasfrei sind. Es wurde deswegen vor den Messungen die Temperatur etwa 1 Stunde lang auf 130° gehalten, bis alle Teile der Pumpe ausreichend entgast waren. Entsprechend dem Umstand, daß S bei $0,00001$ mm Druck noch seinen vollen Wert hat, folgt, daß ein Grenzvakuum nicht beobachtet werden konnte. In verhältnismäßig kurzer Zeit war der 3,5-Liter-

rezipient so weit evakuiert, daß nicht nur kein Gasbläschen an der Kapillare des Mac Leodschen Manometers zu beobachten war, sondern daß das Quecksilber in Ermangelung von Luftresten die Kompressionskapillare so vollkommen ausfüllte, daß es beim Zurückfließenlassen in der Kompressionskapillare hängen blieb und sich erst plötzlich ablöste, wenn die Quecksilberkuppe in der kommunizierenden Röhre einige Zentimeter tiefer stand, als die Quecksilberkuppe, welche die Kapillare ausfüllte. Das Grenzvakuum ist somit unbestimmbar hoch.

Die Beobachtungen in Tab. V haben ein Maximum der Sauggeschwindigkeit beim Dampfdruck $P = 0,27$ erkennen lassen. Die Existenz eines Maximums der Sauggeschwindigkeit bei einem bestimmten Druck hatte auch die theoretische Behandlung der Saugwirkung durch eine kreisförmige Öffnung in Gleichung (27) ergeben. Die Übereinstimmung läßt sich graphisch veranschaulichen, auch ohne die Berechnung für eine spaltförmige Öffnung entsprechend der praktischen Anordnung bei der Pumpe neu durchführen zu müssen, wenn man dem Umstand, daß die Größe λ/d in Gleichung (23) beim Spalt in verschiedenen Richtungen verschiedene Werte

hat, von denen λ/h der kleinste ist, wenn h die Spaltbreite ist, dadurch Rechnung trägt, daß man als mittleren Wert $d = 0,036$, d. i. die dreifache Spaltbreite einsetzt. Der Querschnitt q ist bei der Spaltöffnung $h = 0,012$ cm gleich $q = 0,13$ qcm.

Setzen wir ferner in Gleichung (28) $k = 0,08$, so erhalten wir die Kurve Fig. 14. Die Abszissen geben die Dampfdrucke, die Ordinaten die Werte S/q , d. i. die Sauggeschwindigkeit pro Quadratcentimeter Öffnung. Die beobachteten Werte sind als Kreise eingetragen. Man sieht deutlich, daß die theoretisch geforderte Abhängigkeit der Sauggeschwindigkeit von dem Dampfdruck durch die Beobachtung bestätigt wird. Die günstigste Saug-

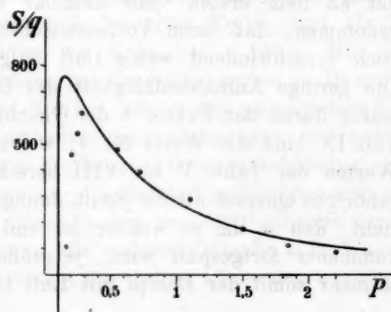


Fig. 14.

geschwindigkeit liegt bei den niedrigsten Drucken, bei welchen die Pumpe noch arbeitet. Das Zurücktreten der Luft aus dem Vorvakuum ist an der Fortsetzung der Kurve unter die Nullinie, an der negativen Sauggeschwindigkeit erkennbar. Dieselbe konnte gut beobachtet, aber nicht gemessen werden, weil beim Unterschreiten einer gewissen Temperatur dieses Zurücktreten der Luft zu plötzlich erfolgte, wie auch aus der Steilheit der theoretischen Kurve hervorgeht. Bei steigendem Druck nimmt die Sauggeschwindigkeit ebenfalls im Sinn der theoretischen Kurve ab. Die Luftmoleküle werden beim Eintritt in den Spalt um so mehr von den Quecksilbermolekülen zurückgetrieben, je größer der Dampfdruck und je kleiner somit die freie Weglänge der Luftmoleküle zwischen den Dampfmolekülen ist. Die Versuche zeigen ferner, daß der Dampfstrom nicht imstande ist, die gesamte in der Spaltöffnung befindliche Luft fortzuschaffen, indem die Sauggeschwindigkeit mit 2 Spalten von 0,12 mm Weite annähernd gleich groß ist, wie mit 1 Spalt, während theoretisch die doppelte Sauggeschwindigkeit zu erwarten wäre. Die dem Zylinder benachbarte Dampfschicht hat an dem ersten Spalt offenbar schon so viel Luft aufgenommen, daß beim Vorbeistreichen am zweiten Spalt nur noch verschwindend wenig Luft aufgenommen werden kann. Die geringe Aufnahmefähigkeit des Dampfstromes ist zahlenmäßig durch den Faktor k der Gleichung (28) ausgedrückt. In Tab. IX sind die Werte für k , welche aus den beobachteten Werten der Tab. V bis VIII berechnet sind, mit dem zugehörigen Querschnitt der Spaltöffnung zusammengestellt. Man sieht, daß k um so kleiner ist und die Luft um so unvollkommener fortgespült wird, je größer der Querschnitt q ist, je mehr somit der Dampf mit Luft beladen wird.

Tabelle IX.

q	k	q	k
0,26	0,04	0,086	0,09
0,13	0,08	0,043	0,14

Nach Gleichung (28) muß die Sauggeschwindigkeit in hohem Maße von der Dichtigkeit des Gases abhängen. Die Faktoren $\sqrt{\rho_0}$ und α beeinflussen die Sauggeschwindigkeit S derart, daß bei kleinerer Gasdichte die Sauggeschwindigkeit größer sein muß.

Die theoretisch geforderte Abhängigkeit der Saugwirkung von der Gasdichte ρ_0 erwies sich als zu Recht bestehend. Ich verwendete die oben beschriebene Versuchsanordnung (Fig. 13), mit welcher die Diffusionspumpe demonstriert werden kann, indem die Luft aus einer Entladungsröhre, ich hatte eine Röntgenröhre, durch die Diffusionspumpe in ein Vorvakuumreservoir befördert wird. Bei einem Druck von 0,25 mm beginnend, wurde die Röntgenröhre in 25 Sekunden bis zum Einsetzen einer Parallelfunkenstrecke von 16 mm Länge evakuiert. Beim weiteren Pumpen stieg die Schlagweite auf 100 mm. Die Dampftemperatur war 119° . Bei 126° betrug die Zeit 30 Sekunden, bei 135° 45 Sekunden. Wurde die Apparatur mit Wasserstoff gefüllt, so betrug unter den gleichen Umständen die Zeit bei 116° , 125° und 132° jeweils nur 5 Sekunden. Wasserstoff wird somit erheblich rascher, über 4 mal so rasch abgesaugt wie Luft.

Diese Messungen zeigen, daß die Diffusionspumpe in erster Linie für wissenschaftliche Beobachtungen geeignet ist, bei welchen es auf die Erreichung der extrem höchsten Vakua bei lange anhaltendem Pumpen ankommt. Der Grenzwert der Luftverdünnung liegt bei der Diffusionspumpe tiefer als bei jeder Pumpe mit mechanisch bewegten Teilen und als bei dem Absorptionsverfahren mit Koks bei -180° . Mit dem letzten Entluftungsverfahren hat die Diffusionspumpe die größte Ähnlichkeit im Betrieb. Sie hat jedoch den prinzipiellen Vorzug, die leichten Gase besonders rasch abzusaugen, während bei dem Absorptionsverfahren die leichten Gase zurückbleiben. Bei der Diffusionspumpe sind nur die Quecksilberdämpfe durch eine besondere Kühlvorlage, die auf wenigstens -80° gehalten werden muß, abzufangen, während alle anderen Dämpfe, z. B. Wasserdämpfe, von der Diffusionspumpe selbst abgesogen werden.

7. Zusammenfassung der Resultate.

Die gegenseitige Durchdringung von Quecksilberdampf und Gasen wird bei verminderten Drucken experimentell untersucht und festgestellt, daß die Stephansche Diffusionsgleichung die Gleichgewichtszustände gut darstellt. Die Versuche zeigen, daß man mit einer Quecksilberluftpumpe in einem Gefäß einen Totaldruck erzeugen kann, welcher um ein Vielfaches niedriger ist als der Totaldruck in der dauernd mit dem Gefäß kom-

munizierenden Pumpe, wenn die Röhre, welche die Pumpe mit dem Gefäß verbindet, an einer Stelle gekühlt ist. Die bestehende, im Lehrbuch von Müller-Pouillet vertretene Ansicht, man könne mit einer Quecksilberluftpumpe keinen niedrigeren Totaldruck erzeugen als wie die Spannkraft der Dämpfe in der Pumpe beträgt, ist nicht nur widerlegt, sondern in der vorliegenden Untersuchung ist im Gegenteil gezeigt, daß der Diffusionsvorgang so geregelt werden kann, daß auch ohne Wirkung der Luftpumpe beliebig niedrige Partialdrucke und Totaldrucke erzeugt werden können. Eine Vorrichtung dieser Art wird als Diffusionsluftpumpe bezeichnet. Die einfachste Diffusionsluftpumpe besteht aus einem geschlossenen Tonzylinder, der außen mit luftfreiem Wasserdampf umspült wird. Durch die Wand des Tonzylinders diffundiert von außen nach innen der Wasserdampf, von innen nach außen die im Tonzylinder enthaltene Luft. Wird der Wasserdampf im Innern des Tonzylinders bei Zimmertemperatur kondensiert, so sinkt der Druck in dem Tonzylinder allmählich von 740 mm auf 15 mm. Durch Kombination einer Tonmembran mit einer Wasserstrahlpumpe gelingt es nach dem gleichen Prinzip, eine Röntgenröhre so hoch zu evakuieren, daß Röntgenstrahlen auftreten. Wegen der durch die Membran verursachten langsamen Saugwirkung wird bei der Diffusionsluftpumpe die Tonmembran ersetzt durch einen Stahlzylinder mit einem oder mehreren Spalten, welche so gestellt sind, daß die Spaltweite von gleicher Größenordnung ist, wie die freie Weglänge der Moleküle. Des geringen Dampfdruckes wegen ist das Wasser durch Quecksilber ersetzt. Auf diese Weise gelang es, eine Diffusionsluftpumpe zu konstruieren, welche nicht nur die gleiche, mittlere Sauggeschwindigkeit hat, wie die früher vom Verfasser konstruierte rotierende Quecksilberluftpumpe, sondern sogar vor dieser die Vorzüge hat, außer den Gasen auch alle Dämpfe abzusaugen, ausgenommen den Quecksilberdampf, und wenn man die Quecksilberdämpfe ausfriert, von allen bisher bekannten Luftpumpen das höchste Vakuum zu geben.

Freiburg i/Br., Technisch-physikalisches Institut der
Universität, 17. November 1914.

(Eingegangen 19. November 1914.)

4. Theoretisches über Gleitflächen und Kristallplastizität im allgemeinen; von R. Schachenmeier.

§ 1. Einleitung.

Es ist noch nicht gelungen, umfassende Gesetze aufzufinden, welche die physikalischen Ursachen der bei Kristallen zu beobachtenden Gleitungen, künstlichen Zwillingsbildungen usw. klarlegen. Angesichts des ausgedehnten, bereits vorhandenen empirischen Materials erscheint es daher von Interesse, zu untersuchen, was die allgemeinen Methoden der Kristallphysik in Anwendung auf dieses Problem aussagen.

Es soll im folgenden gezeigt werden, daß und unter welchen Annahmen über den molekularen Bau der Kristalle Gleitungen, künstliche Zwillingsbildung usw. theoretisch möglich sind. Dabei werden folgende allgemeine Annahmen molekulartheoretischer Natur gemacht:

Man denke sich den Kristall als Bravais'sches Raumgitter (dessen Elementarmassen oder Molekeln nicht mit den chemischen Molekülen identisch zu sein brauchen). Eine Deformation des Kristalles ändert die Raumgitteranordnung der Molekeln, wobei dieselben aus ihren stabilen Gleichgewichtslagen entfernt werden. Ihre Abweichung vom Gleichgewicht werde gemessen durch einen Parameter ω .¹⁾

Die elastische Reaktion, welche der Kristall bei Deformation leistet, kann man erklären aus dem Bestreben der Molekeln, in ihre stabilen Gleichgewichtslagen zurückzukehren. Ist jedoch die Substanz plastisch, so daß die Deformation, z. B. eine Gleitung, nach Aufhören der äußeren Kraftwirkung nicht von selbst rückgängig wird, so müssen die Molekeln in der

1) Wir werden denselben mitunter anschaulich als eine Verdrehung der Molekeln relativ zum Volumelement bezeichnen, ohne jedoch diese Vorstellung vor anderen Möglichkeiten zu bevorzugen.

neuen Raumgitteranordnung sich wiederum in stabilen Gleichgewichtslagen befinden.

Die Existenz solcher neuer Gleichgewichtslagen ist zu beweisen. Das mechanische Verhalten eines Raumgitters direkt zu analysieren, ist zwar mit unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten verknüpft, der Beweis gelingt jedoch, wenn man die beiden Hauptsätze der Thermodynamik zu Hilfe nimmt.

§ 2. die thermodynamischen Potentiale.

Bedeutet U die innere Energie, S die Entropie und T die absolute Temperatur eines Volumelementes, so ist das erste thermodynamische Potential

$$(1) \quad \xi = U - TS,$$

und es ist

$$(2) \quad dU = dQ - d\alpha,$$

wo $d\alpha$ die vom Kristall gegen die angreifenden Kräfte geleistete mechanische Arbeit und dQ die aufgenommene Wärme¹⁾ darstellen.

Der „innere Parameter“ ω hat den Charakter einer Koordinate. Betrachtet man also das Raumgitter des Volumelementes als mechanisches System, so kann man ω zusammen mit den 6 Deformationsgrößen:

$$(3) \quad x_x, y_y, z_z, y_x, z_x, x_y = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,$$

als die generalisierten Koordinaten derselben auffassen. Ist Ω diejenige innere an den Molekeln angreifende Kraft, welche auf Vergrößerung der Koordinate ω hinwirkt, und sind

$$(4) \quad X_x, Y_y, Z_z, Y_x, Z_x, X_y = X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6,$$

die Komponenten des am Volumelement angreifenden äußeren Spannungstensors, so ist

$$(5) \quad d\alpha = \sum_{h=1}^6 X_h dx_h + \Omega d\omega,$$

also auch

$$(6) \quad dU = dQ - \sum_{h=1}^6 X_h dx_h - \Omega d\omega.$$

Nach (1) ist, nunmehr

$$(7) \quad d\xi = dU - TdS - SdT.$$

1) In mechanischem Maß.

Gemäß der Definition der Entropie ist

$$(8) \quad T dS = dQ = dU + \sum_{h=1}^6 X_h dx_h + \Omega d\omega,$$

also

$$(9) \quad d\xi = dU - dU - \sum_{h=1}^6 X_h dx_h - \Omega d\omega - S dT,$$

$$(10) \quad d\xi = - \sum_{h=1}^6 X_h dx_h - \Omega d\omega - S dT.$$

Behandelt man x_h , ω , T als voneinander unabhängige Variable, so gilt hiernach

$$(11) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x_h} = -X_h, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \omega} = -\Omega, \quad \frac{\partial \xi}{\partial T} = -S.$$

Das zweite thermodynamische Potential lautet:

$$(12) \quad \zeta = \xi + \sum_{h=1}^6 X_h x_h,$$

woraus

$$(13) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial X_h} = +x_h, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = -\Omega, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial T} = -S.$$

Aus ζ ist schließlich das Potential Φ zu bilden nach

$$(14) \quad \Phi = \frac{\zeta}{T}.$$

Das Potential ξ kann in seiner Abhängigkeit von den Deformationsgrößen x_h durch eine Potenzreihe dargestellt werden. Da die Werte sämtlicher Koordinaten kleine echte Brüche sind, so genügt es, die quadratischen Glieder derselben zu berücksichtigen¹⁾:

$$(15) \quad \xi = \sum_{(i,k)} c_{ik} x_i x_k.$$

Die Koeffizienten c_{ik} sind die adiabatischen Elektrizitätskonstanten und hängen (in erster Annäherung) nicht von der Temperatur ab. Wegen (11) ist schließlich

$$(16) \quad X_h = \sum_{k=1}^6 c_{hk} x_k$$

oder aufgelöst (nach (13)):

$$(17) \quad x_h = \sum_{k=1}^6 C_{hk} X_k.$$

1) Die linearen Glieder stellen die hier nicht in Betracht kommenden Erscheinungen der thermischen Dilatation dar. Vgl. W. Voigt, Lehrb. d. Kristallphysik.

Die Deformationsgrößen x_h , sowie die Spannungskomponenten X_h sind analytische Funktionen und können in ihrer Abhängigkeit von ω durch Potenzreihen dargestellt werden. Da ω nur kleine Werte annimmt, so können dieselben mit dem linearen Gliede abgebrochen werden, so daß

$$(18) \quad x_h = x'_h + x''_h \omega, \quad (h = 1, 2, \dots, 6)$$

$$(19) \quad X_h = X'_h + X''_h \omega.$$

Aus (12), (13), (15) folgt damit

$$(20) \quad \begin{cases} \Omega = \sum_{(i,k)} c_{ik} (x''_i x'_k + x'_i x''_k) - \sum_{(h)} (X''_h x'_h + X'_h x''_h) \\ + \omega \{ 2 \sum_{(i,k)} c_{ik} x''_i x''_k + 2 \sum X''_h x''_h \} = c' + c'' \omega \end{cases}$$

und aufgelöst:

$$(21) \quad \omega = C' + C'' \Omega.$$

Dieser Ansatz (18), (19) hat den Sinn, daß bei zwei aufeinanderfolgenden „Verdrehungen“ der Molekeln die Wirkungen auf die Gestalt des Volumelements sich einfach superponieren.

Da das Potential ζ nach (12), (13) von der Variablen

$$(22) \quad X_h, x_h, \Omega, \omega, T$$

abhängt, so sind dieselben für den thermodynamischen Zustand des Systems maßgebend, d. h. Zustandsparameter. Nach (16) bestehen jedoch 6 und nach (18) ebenfalls 6 Relationen zwischen denselben, so daß nur drei willkürlich sind. Werden zwei äußere Parameter, X_i, T , festgehalten, so herrscht Gleichgewicht, wenn

$$(23) \quad \delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \delta \omega = 0,$$

d. h. wenn

$$(24) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = 0.$$

Dies ist eine weitere Beziehung zwischen den Parametern (22), von denen also nur noch zwei willkürlich sind.

Wir treffen nun noch eine Festsetzung bezüglich der Koeffizienten X''_h von (19). Es sollen nämlich alle X''_h gleich 0 sein bis auf einen, $X''_i \neq 0$. Wenn wir dem Index i nacheinander die Werte 1, 2, ..., 6 erteilen, dann gehören zu den

so definierten Spannungskomponenten (19) nach (17) Deformationsgrößen $x_h^{(i)}$ für $i = 1, 2, \dots, 6$. Da die Kräfte und Deformationen klein sind und außerdem ihre gegenseitige Abhängigkeit linear ist, so gilt das Superpositionsgesetz. D. h. wenn die eben definierten speziellen 6 Spannungstensoren zugleich wirkten, was einem gänzlich willkürlichen Spannungstensor entspricht, so würden sie die Deformationen

$$(25) \quad x_h^{(1)} + x_h^{(2)} + \dots + x_h^{(6)}$$

hervorbringen. Anstatt also den Kristall unter der Wirkung eines beliebigen Kräftesystems zu betrachten, können wir nacheinander Spannungstensoren wirken lassen, von denen jeweils nur eine Komponente von ω abhängig ist. Dies bringt für die folgenden Entwicklungen Vorteile mit sich.

§ 3. Explizite Gleichgewichtsbedingung.

Gleichung (23) § 2 läßt sich explizite aufstellen, wenn man noch berücksichtigt, daß auch die innere Energie U eine analytische Funktion ist, deren Potenzentwicklung nach ω mit den linearen Gliedern abgebrochen werden kann:

$$(1) \quad U = U' + U'' \omega.$$

Dieser Ansatz sagt wieder aus, daß bei zwei aufeinanderfolgenden „Verdrehungen“ der Molekeln die gesamte damit verbundene Änderung der inneren Energie gleich der Summe der beiden Einzeländerungen ist. Nach (8) und (6) § 2 ist

$$(2) \quad dS = \frac{dU + \sum_{(h)} X_h dx_h + \Omega d\omega}{T},$$

also wegen (18) § 2, (1) § 3

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} dS &= \frac{dU' + \sum X_h dx_h' + \Omega d\omega}{T} + \frac{dU'' + \sum X_h dx_h''}{T} \omega \\ &\quad + \frac{U'' + \sum X_h x_h''}{T} d\omega. \end{aligned} \right.$$

Wir denken uns nun mit Hilfe von (17), (18), (19) § 2 die dx_h' , dx_h'' ausgedrückt durch dX_h' , dX_h'' (unabhängig von ω) und betrachten jetzt S als Funktion der Variablen X_h' , X_h'' , T , ω . Bezeichnet $(dS)_\omega$ das bei konstantem Parameter ω genommene

Differential derselben, ebenso $(dS)_{T, X', X''}$ das Differential bei konstanten Parametern T, X_h', X_h'' , so ist¹⁾

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} (dS)_\omega &= \frac{dU' + \sum X_h' d x_h'}{T} + \frac{dU'' + \sum (X_h'' d x_h' + X_h' d x_h'')}{T} \omega \\ &= dS_1 + dS_2 \cdot \omega, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad (dS)_{T, X', X''} = \left\{ \frac{c' + c'' \omega}{T} + \frac{U'' + \sum (X_h' + X_h'' \omega) x_h''}{T} \right\} d\omega,$$

(da auch U', U'' von ω unabhängig sind, und da nach (20) § 2 $\Omega = c' + c'' \omega$ ist). Daraus folgt aber:

$$(6) \quad S = S_1 + S_2 \omega + \frac{c' \omega}{T} + \frac{c'' \omega^2}{2T} + \frac{U'' + \sum \left(X_h' + \frac{X_h''}{2} \omega \right) x_h''}{T} \omega + k,$$

wo die Konstante k von den Variablen X_h', X_h'', T, ω nicht abhängt.

Nach (1), (14), (12) § 2, (6) ist nun

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi &= \frac{\zeta}{T} = \frac{U' + \sum X_h' x_h'}{T} + \frac{U'' + \sum (X_h' x_h'' + X_h'' x_h')}{T} \omega - S_1 \\ &\quad - S_2 \omega - \frac{c' \omega}{T} - \frac{c'' \omega^2}{2T} - \frac{U'' + \sum \left(X_h' - \frac{X_h''}{2} \omega \right) x_h''}{T} \omega - k. \end{aligned} \right.$$

Sollen bei einer willkürlichen Variation des Parameters ω die äußeren Variablen X_i, T konstant bleiben, so muß wegen (19) § 2 $X_i'' = 0$ sein; nach p. 396/397 sind auch alle $X_h'' = 0$ ($h \neq i$).

Unter diesen Bedingungen lautet dann Φ :

$$(8) \quad \Phi = \frac{U' + \sum X_h' x_h'}{T} - S_1 - S_2 \omega - \frac{c' \omega}{T} - \frac{c'' \omega^2}{2T} - k.$$

Eine virtuelle Zustandsänderung bei konstanten äußeren Parametern T, X_i gibt die Gleichgewichtsbedingung:

$$(9) \quad \delta \Phi = \left(-\frac{c' + c'' \omega}{T} - S_2 \right) \delta \omega = 0,$$

d. h.

$$(10) \quad \frac{c' + c'' \omega}{T} = -S_2.$$

Differenzieren nach T bei konstantem X_i gibt²⁾

$$(11) \quad \frac{c''}{T} \left(\frac{\partial \omega}{\partial T} \right)_{X_i} - \frac{c' + c'' \omega}{T^2} = - \left(\frac{\partial S_2}{\partial T} \right)_{X_i}.$$

1) Indem höhere Potenzen von ω vernachlässigt werden.

2) c', c'' sind von T unabhängig angenommen, vgl. p. 408.

Um $(\partial S_2 / \partial T)_{X_i}$ zu berechnen, beachten wir, daß nach (4) (weil $X_i'' = 0$, $X_h'' = 0$ ($h \neq i$)):

$$(12) \quad dS_2 = \frac{dU'' + \sum X_h' dx_h''}{T},$$

also

$$(13) \quad \left(\frac{\partial S_2}{\partial T} \right)_{X_i} = \frac{\left(\frac{\partial U''}{\partial T} \right)_{X_i} + \sum X_h' \left(\frac{\partial x_h''}{\partial T} \right)_{X_i}}{T}.$$

Nach (1) § 3, (18) § 2 sind U'' , x_h'' die Änderungen der inneren Energie bzw. der Deformationsgrößen, welche bei der Änderung „eins“ der Koordinate ω auftreten. X_h' ($h = 1, \dots, 6$) stellen die bei dieser Änderung konstant gehaltenen Spannungskomponenten dar. Nach dem ersten Hauptsatz ist daher

$$(14) \quad U'' + \sum_{(h)} X_h' x_h''$$

die von außen zugeführte Wärme, wenn die „Verdrehung“ ω der Molekeln bei konstanten Spannungen X_i und X_h ($h \neq i$) und bei konstanter Temperatur T um die Einheit zunimmt.

Werden die Spannungen X_h' auch gegenüber Temperaturänderungen konstant gehalten, so ist

$$(15) \quad \left(\frac{\partial U''}{\partial T} \right)_{X_i} + \sum_{(h)} X_h' \left(\frac{\partial x_h''}{\partial T} \right)_{X_i} = \left(\frac{\partial (U'' + \sum X_h' x_h'')}{\partial T} \right)_{X_i} = r$$

der Temperaturkoeffizient dieser Wärme (14). Aus (11) folgt nun

$$(16) \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial T} \right)_{X_i} = \frac{c' + c'' \omega - r T}{c'' T}$$

oder

$$(17) \quad d\omega = \frac{c' + c'' \omega - r T}{c''} \frac{dT}{T}.$$

§ 4. Weitere Hilfsformeln.

Außer dieser Formel lassen sich noch andere Relationen zwischen den Zustandsvariablen aufstellen auf Grund der Eigenschaft des Systems, nur zwei willkürliche Parameter zuzulassen. Werden irgend zwei, x, y , von den Parametern (22), § 2 als bestimmende Variable betrachtet, dann gilt für die bei einer beliebigen Zustandsänderung aufgenommene Wärme:

$$(1) \quad dQ = X dx + Y dy.$$

Ferner ist die „innere Arbeit“, wenn $\Omega d\omega = d\Pi$ gesetzt wird,

$$(2) \quad d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy$$

und die innere Energie

$$(3) \quad dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy,$$

außerdem

$$(4) \quad dx_h = \frac{\partial x_h}{\partial x} dx + \frac{\partial x_h}{\partial y} dy,$$

also schließlich wegen (1), (2), (3) und (6) § 2

$$(5) \quad \begin{cases} X dx + Y dy = \frac{\partial (U - \Pi)}{\partial x} dx + \frac{\partial (U - \Pi)}{\partial y} dy \\ \quad - \sum_{(h)} X_h \left(\frac{\partial x_h}{\partial x} \right)_y dx - \sum_{(h)} X_h \left(\frac{\partial x_h}{\partial y} \right)_x dy. \end{cases}$$

Da die Variationen dx, dy gänzlich voneinander unabhängig und willkürlich sind, so folgt

$$(6) \quad X = \frac{\partial (U - \Pi)}{\partial x} - \sum_{(h)} X_h \left(\frac{\partial x_h}{\partial x} \right)_y,$$

$$(7) \quad Y = \frac{\partial (U - \Pi)}{\partial y} - \sum_{(h)} X_h \left(\frac{\partial x_h}{\partial y} \right)_x,$$

und durch Differentiation ergibt sich hieraus

$$(8) \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \sum_{h=1}^6 \left(\frac{\partial X_h}{\partial x} \frac{\partial x_h}{\partial y} - \frac{\partial X_h}{\partial y} \frac{\partial x_h}{\partial x} \right).$$

Aus (1) folgt durch Division mit T :

$$(9) \quad \frac{dQ}{T} = \frac{X}{T} dx + \frac{Y}{T} dy$$

und hieraus in der bekannten Weise¹⁾

$$(10) \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{T} \left(X \frac{\partial T}{\partial y} - Y \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Kombination mit (8) liefert

$$(11) \quad X \frac{\partial T}{\partial y} - Y \frac{\partial T}{\partial x} = T \cdot D(x, y),$$

wobei

$$(12) \quad D(x, y) = \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial x} \frac{\partial x_h}{\partial y} - \frac{\partial X_h}{\partial y} \frac{\partial x_h}{\partial x} \right).$$

1) Vgl. z. B. Chwolson, Lehrb. d. Phys. 3. p. 506. 1905.

§ 5. Adiabatische Spannungsänderung.

Wird die Spannungskomponente X_i adiabatisch (also z. B. plötzlich) vergrößert oder verkleinert, so ist damit notwendig eine Temperaturänderung verbunden, welche sich aus den Formeln (1), (11), (12) § 4 berechnen läßt. Die beiden Parameter x, y sind darin durch

$$(1) \quad x = T, \quad y = X_i$$

zu ersetzen, ferner ist die Zustandsfunktion X durch die spezifische Wärme bei konstantem X_i :

$$(2) \quad X = c_{X_i}.$$

Dann ist $\partial T / \partial x = 1$, $\partial T / \partial y = 0$ und (11) § 4 wird

$$(3) \quad Y = T \cdot \sum_{(h)} \left[\left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T \right].$$

Setzt man ferner in (1) § 4 die Größen (1), (2) ein und betrachtet, daß bei einem adiabatischen Prozeß $dQ = 0$ ist, so wird

$$(4) \quad c_{X_i} dT + Y dX_i = 0,$$

oder wegen (3):

$$(5) \quad dT = - \frac{T}{c_{X_i}} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T \right\} \cdot dX_i.$$

Da wir in unserem System die Parameter T, X_i als unabhängige wählen können, so ist durch sie der Parameter ω völlig bestimmt, also durch dT und dX_i auch die Änderung $d\omega$. Dieselbe läßt sich berechnen, wenn man annimmt, daß bei der adiabatischen Spannungsänderung zunächst ω konstant bleibt und X_i um dX_i sich ändert, dann $X_i + dX_i$ konstant bleibt und ω um $d\omega$ variiert. Es ist zunächst zu zeigen, daß diese beiden Vorgänge möglich sind. In jedem derselben tritt nämlich zu (16), (18) § 2 und (23) bzw. (24) § 2 eine weitere Bedingung hinzu, nämlich im ersten $\omega = \text{const}$; im zweiten $X_i + dX_i = \text{const}$. Dieselben müssen mit (16), (18), (23) bzw. (24) § 2 verträglich sein. Nun ist wegen $\omega = \text{const}$ auch $\delta\omega = 0$ also $\delta\Phi = 0$ und also keine wesentliche Bedingung im ersten Vorgang hinzugetreten. Ferner ist bei $X_i + dX_i = \text{const}$ (23) § 2 mit (16) § 3 gleichwertig, (16), (18) § 2 sind, auch wenn $X_i + dX_i = \text{const}$, erfüllt. Also sind beide Vorgänge möglich.

Um die unter der Bedingung $\omega = \text{const}$ auftretende Temperaturänderung zu berechnen, nehmen wir als unabhängige Veränderliche

$$(6) \quad x = T, \quad y = \omega.$$

Dann ist

$$(7) \quad dQ = c_\omega dT + \varrho d\omega.$$

c_ω ist die Wärmekapazität bei konstantem ω und ϱ die Wärmemenge, welche zur Änderung von ω um die Einheit bei konstanter Temperatur nötig ist. (11) § 4 wird demzufolge

$$(8) \quad \varrho = T \sum_{(h)} \left[\left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right].$$

Hieraus folgt

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial X_i}{\partial T} \right)_\omega &= \left[T \left\{ \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\} - \varrho \right] \frac{1}{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \omega} \right)_T} \end{aligned} \right.$$

(\sum' bedeutet Summation über alle Werte von h außer $h = i$).

Die Temperaturänderung bei konstantem ω ist also

$$(10) \quad dT = \frac{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \omega} \right)_T}{- \varrho + T \left\{ \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\}} \cdot dX_i.$$

(10) unterscheidet sich von der endgültig im Gleichgewichte eintretenden Temperaturänderung (5) um

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta T &= \left[\frac{T}{c_{X_i}} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \omega} \right)_T}{- \varrho + T \left\{ \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\}} \right] dX_i. \end{aligned} \right.$$

Um diesen Wert muß sich also die Temperatur ändern, wenn der Gleichgewichtszustand erreicht werden soll. Dabei ist nun $X_i + dX_i$ konstant zu halten. Im Gleichgewichte gehört infolgedessen nach (17) § 3 zur Temperaturänderung δT die Änderung von ω :

$$(12) \quad d\omega = \frac{e' + e''\omega - rT}{e''} \cdot \frac{\delta T}{T}$$

oder:

$$(13) \quad \left\{ d\omega = \frac{e' + e''\omega - rT}{e'' T} \left[\frac{T}{e_{X_i}} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \omega} \right)_T}{-e + T \left\{ \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\}} \right] dX_i. \right.$$

Die Parameter T, ω haben nunmehr im definitiven Gleichgewichtszustand die Änderungen (5) bzw. (13) erfahren.

§ 6. Bedingung der Plastizität.

Wenn aus irgendeinem Grunde die Parameter T, ω variieren, so ist in § 4

$$(1) \quad x = T, \quad y = \omega$$

zu setzen, und aus (1) § 4 folgt

$$(2) \quad c_\omega dT + Y d\omega = 0,$$

ferner aus (11) § 4:

$$(3) \quad -Y = T \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega \right\}.$$

(2) und (3) ergeben

$$(4) \quad d\omega = \frac{c_\omega}{T \cdot \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega \right\}} dT.$$

Bei unserem Vorgang adiabatischer Belastung variieren nun gerade die Parameter T und ω nach (5) § 5 bzw. (13) § 5. Die Änderung dT nach (5) § 5 bewirkt daher infolge dieser Beziehung (4) einer Variation von ω :

$$(5) \quad d\omega = - \frac{c_\omega \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T \right\}}{e_{X_i} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega \right\}} dX_i.$$

Nach (13) § 5 ist aber schon eine Variation des Parameters ω vorhanden, und die beiden heben sich gerade auf, wenn:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \frac{c' + c'' - rT}{c''T} \left[\frac{T}{cX_i} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \omega} \right)_T}{-q + T \left\{ \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{c_\omega \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} \right\}}{c_{X_i} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega \right\}} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Berechnet man aus (4) § 6 und (13) § 5 die zur Spannungsänderung dX_i gehörige Temperaturerhöhung, so wird dieselbe durch (5) § 5 ebenfalls kompensiert, wenn diese Bedingung (6) erfüllt ist. Es haben also die Parameter T und ω ihre ursprünglichen Werte wieder erlangt.

Da unser System zweiparametrig ist, so hängt U nur von den Parametern T, ω ab. Da dieselben nach den vorigen ihre ursprünglichen Werte wieder erlangt haben, so muß demnach auch U seinen Anfangswert wieder haben. D. h. es ist keine Deformationsenergie mehr vorhanden. Obgleich eine Deformation des Kristalles infolge der Belastung der Spannungskomponente X_i um dX_i stattgefunden hat, befindet er sich wieder in spannungslosem Zustand.

Der ganze Vorgang kann anschaulich so gedeutet werden, daß infolge der äußeren Kraftwirkung zunächst die Molekeln eine Verdrehung aus ihren Gleichgewichtslagen erleiden, deren Größe durch (13) § 5 gegeben ist unter gleichzeitiger Änderung der Temperatur nach (5) § 5. Natürlich erfahren auch die Deformationsgrößen x_h Änderungen. Wenn (6) erfüllt ist, so gelangen die Molekeln in neue Gleichgewichtslagen, was sich dadurch zu erkennen gibt, daß die Parameter T, ω ihre Ausgangswerte wieder annehmen. Bedingung (6) reicht aber nicht aus, um auch zu bewirken, daß die Änderungen der Parameter x_h verschwinden. Es bleibt also eine Deformation ohne innere Spannungen.

Dieser Vorgang ist natürlich als sich ständig wiederholend zu denken, wenn die Kraft $X_i + dX_i$ stetig wirkt.

Infolge der Parameteränderungen $dT, d\omega$ nach (5) § 5, (13) § 5 wird innere Energie aufgespeichert:

$$(7) \quad dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial \omega} d\omega,$$

(welche der von der äußeren Kraft $X_i + dX_i$ geleisteten Arbeit entstammt). Sind nun die Molekeln in ihren neuen Gleichgewichtslagen angelangt, was sich durch Verschwinden der Änderungen $dT, d\omega$ kennzeichnet, so ist auch nach (7) $dU = 0$. Die Energie (7) verwandelt sich dabei in Wärme, was als Reibungswärme in Erscheinung tritt.

Sie kann andererseits zunächst potentielle Formenergie bleiben¹⁾, auf deren Kosten alsdann der Deformationsvorgang von selbst noch etwas weiter schreitet. Letzteres tritt besonders bei Umklappung des Raumgitters in Zwillingsstellung ein, wie gewisse Beobachtungen namentlich von Reusch lehren. Z. B. können infolge einer Kraftwirkung im Kristall auftretende Spalten oder Hohlräume wieder vollständig zurückgehen. Hat die Deformation aber eine gewisse Grenze überschritten, so geht sie nicht mehr zurück, sondern schreitet noch etwas weiter. Es wird also potentielle Energie der Molekeln angesammelt, auf deren Kosten im ersten Fall der Vorgang rückgängig wird, im zweiten Fall von selbst noch etwas weiter geht.

§ 7. Die ohne Störung der Symmetrie des Kristalles, d. h. seiner Raumgitterstruktur möglichen plastischen Deformationen.

Wir betrachten nun die Fälle, bei welchen die Wärme ϱ , die zur Änderung 1 des Parameters ω unter konstanter Temperatur nötig ist, groß ist im Vergleich zu den übrigen in (6) § 6 vorkommenden Ausdrücken $(\partial X_h / \partial T)_{X_i}, \dots$. Letztere sind ohnehin klein, da z. B. $(\partial x_h / \partial T)_{X_i}$ ein linearer Ausdehnungskoeffizient ist. Ist also die zur Verdrehung der Molekeln unter konstanter Temperatur nötige Wärmezufuhr ϱ beträchtlich, so folgt aus (6) § 6 die vereinfachte Gleichung:

$$(1) \quad \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T \right\} = 0.$$

Ist dieselbe erfüllt, so gelangen nach § 6 die Molekeln infolge der Deformation wieder in neue Gleichgewichtslagen, während die Deformationsgrößen x_h sich um dx_h geändert haben. Wenn sie in den neuen Gleichgewichtslagen ange-

1) Solange (5), (13), § 5 von 0 verschieden sind.

kommen sind, so ist die Temperatur nach § 6 wieder die alte. Also können die Verhältnisse

$$(2) \quad \frac{dx_h}{dX_i}, \quad \frac{dx_h}{dX_i} \quad (h = 1, 2 \dots, 6)$$

als Differentialquotienten der Zustandsparameter X_h nach X_i bei konstanter Temperatur angesehen und mit den Größen

$$(3) \quad \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T, \quad \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \quad (h = 1, 2 \dots, 6)$$

identifiziert werden; (1) schreibt sich dann

$$(4) \quad \sum_{(h)} \left[\frac{dX_h}{dX_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} - \frac{dx_h}{dX_i} \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \right] = 0.$$

Nach (16) § 2 drücken sich die Spannungskomponenten X_h durch die Deformationsgrößen x_h aus, so daß auch

$$(5) \quad \frac{dX_h}{dX_i} = \sum_{(k)} c_{hk} \frac{dx_k}{dX_i}.$$

Folglich wird (4):

$$(6) \quad \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} \sum_{(k)} \left(c_{hk} \frac{dx_k}{dX_i} \right) - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \frac{dX_h}{dX_i} \right\} = 0.$$

Nun ist $\left(\frac{\partial X_i}{\partial T} \right)_{X_i} = 0$, ferner (nach § 2 p. 396/397) $X_h = X'_h (h \neq i)$.

Wir machen noch die Annahme, daß $\left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i}$ ebenso $\left(\frac{\partial X_h''}{\partial T} \right)_{X_i}$ zu vernachlässigen seien gegenüber $\left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i}$, was nach (19) § 2 heißt, daß die Temperaturabhängigkeit der Spannungen wesentlich durch den „inneren Parameter“ ω vermittelt wird. Dann lautet (6):

$$(7) \quad \sum_{(k)} a_{ik} \frac{dx_k}{dX_i} = 0,$$

wobei

$$(8) \quad a_{ik} = \sum_{(h)} c_{hk} \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i}.$$

Diese Bedingung wurde abgeleitet unter der Voraussetzung, daß nur die Komponente X_i von ω abhängig sei. Ist der wirkende Spannungstensor ganz beliebig, so betrachten wir statt dessen sechs Spannungstensoren, von denen jeweils nur eine Komponente mit ω variiert, nämlich beim ersten X_1 , beim

zweiten X_2 , usw. Das Endresultat ist nach p. 397 dasselbe, wie wenn alle sechs Komponenten gleichzeitig von ω abhängig wären. Für jeden dieser Tensoren erscheint nun nach dem vorigen eine Bedingung von der Form (7). Also stellen bei Anbringung eines beliebigen Spannungstensors Gleichung (7) für die Indizes $i = 1, 2 \dots 6$ die notwendige und hinreichende Bedingung der Plastizität dar.

Da wir bisher nur ein einzelnes Volumelement des Kristalls betrachtet haben, so sind die auf dasselbe bei der adiabatischen Beanspruchung wirkenden Komponenten $dX_1 \dots, dX_6$ erst zu berechnen aus den auf den ganzen Kristall angewandten äußeren Kräften. Volumkräfte kommen keine zur Anwendung, dagegen Oberflächenkräfte. In den meisten praktisch realisierten Fällen¹⁾ wirkt in jedem Punkte eines Teiles der Oberfläche eine Kraft S in ein und derselben Richtung s . Dann sind jedenfalls die daraus resultierenden auf das Volumelement wirkenden Spannungen X_i Funktionen von S , und es ist ferner

$$(9) \quad \frac{dx_h}{dX_i} = \frac{dx_h}{dS} \frac{dS}{dX_i}.$$

Die Gleichungen (7) schreiben sich demnach

$$(10) \quad \frac{dS}{dX_i} \cdot \sum_{(k)} a_{ik} \frac{dx_k}{dS} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots, 6)$$

oder

$$(11) \quad \sum_{(k)} a_{ik} \frac{dx_k}{dS} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots, 6).$$

Die Quotienten dx_k/dS definieren diejenige Deformation des Volumelements, welche durch die äußere, in der Richtung s wirkende Kraft hervorgebracht wird. Denn die Belastung dS bringt die Deformationen $dx_k = \frac{dx_k}{dS} dS$ zustande. Genügen die dx_k/dS den Gleichungen (11), so ist die Deformation dauernd, „plastisch“. Die vorhandenen Möglichkeiten plastischer Deformation sind also durch die physikalischen Konstanten des Kristalls (die in den a_{ik} auftreten) bestimmt. Es sind keineswegs beliebige Deformationen möglich. Ihre Mannigfaltigkeit

1) Z. B. wenn der Kristall mit zwei (angeschliffenen) Flächen zwischen die Backen einer Presse gebracht wird.

ist eine diskrete, gegeben durch die Mannigfaltigkeit der Lösungen der linearen Gleichungen (11). Z. B. sind nur in einzelnen bestimmten Richtungen solche möglich. Dies ist nun gerade charakteristisch für die Experimente, welche die Existenz von Gleitflächen, die Möglichkeit künstlicher Zwillingsbildung usw. lehren.

Da die Deformation des Kristalls durch (11) bestimmt ist, worin die Elastizitätskonstanten auftreten, so bleiben diese letzteren bei der Deformation ungeändert. Die Matrix (c_{ik}) der Elastizitätskonstanten legt aber die Symmetrieverhältnisse des Kristalls fest¹⁾, je nachdem welche Konstanten verschwinden, und welche wirklich auftreten. Also bleibt bei den nach (11) möglichen Deformationen die Symmetrie des Kristalls gewahrt, d. h. seine Raumgitterstruktur erhält sich unverändert.

Um die bei einem vorgelegten Kristall mögliche plastische Deformation zu bestimmen, sind die sechs linearen homogenen Gleichungen (11) aufzulösen nach den sechs Unbekannten dx_k/dS ($k = 1, 2 \dots, 6$). Da aber nach p. 406

$$\left(\frac{\partial X_h'}{\partial T}\right)_{X_i}, \quad \left(\frac{\partial X_h''}{\partial T}\right)_{X_i} \quad (h \neq i)$$

zu vernachlässigen sind, so besteht das Gleichungssystem nur aus einer Gleichung. Denn nach (17) § 2 und (19) § 2 ist

$$(12) \quad x_h' = \sum_{(k)} C_{hk} X_k', \quad x_h'' = \sum_{(k)} C_{hk} X_k'',$$

also auch

$$(13) \quad \left(\frac{\partial x_h'}{\partial T}\right)_{X_i}, \quad \left(\frac{\partial x_h''}{\partial T}\right)_{X_i}$$

zu vernachlässigen. Nach (18) § 2 ist somit

$$(14) \quad \left(\frac{\partial x_h}{\partial T}\right)_{X_i} = x_h'' \left(\frac{\partial \omega}{\partial T}\right)_{X_i},$$

und die Gleichungen (11) schreiben sich

$$(15) \quad \sum_{(k)} \frac{dx_k}{dS} \cdot \sum_{(h)} c_{hk} x_h'' = 0$$

oder, wenn

1) W. Voigt, Kristallphysik p. 584. § 287.

$$(16) \quad \sum_{(k)} c_{hk} x_h'' = a_k,$$

$$(17) \quad \sum_{(k)} a_k \frac{dx_k}{dS} = 0.$$

§ 8. Translation längs Gleitflächen.

An Stelle der Deformationsgrößen x_1, x_2, \dots, x_6 können die Verschiebungen u, v, w eingeführt werden nach

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, & x_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, & x_3 = \frac{\partial w}{\partial x}, \\ x_4 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}, & x_5 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, & x_6 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Werden

$$(2) \quad \frac{du}{dS} = u', \quad \frac{dv}{dS} = v', \quad \frac{dw}{dS} = w'$$

gesetzt, so liefert (17) § 7 die Gleichung

$$(3) \quad \begin{cases} a_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + a_6 \frac{\partial u'}{\partial y} + a_5 \frac{\partial u'}{\partial z} + a_6 \frac{\partial v'}{\partial x} + a_2 \frac{\partial v'}{\partial y} + a_4 \frac{\partial v'}{\partial z} \\ + a_5 \frac{\partial w'}{\partial x} + a_4 \frac{\partial w'}{\partial y} + a_2 \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Wir betrachten nun diese Differentialgleichung in dem speziellen Fall, wo sie eine Translation in der Richtung der x -Achse beschreibt, d. h. wir suchen die Bedingung, unter welcher sie die Lösung zuläßt.

$$(4) \quad u' = \alpha y + \beta, \quad v' = 0, \quad w' = 0$$

(α, β sind Konstante). Die Gleichung (3) vereinfacht sich in diesem Falle zu $a_6 \cdot \alpha = 0$, d. h. es muß

$$(5) \quad a_6 = 0$$

oder

$$(6) \quad \sum_{(h)} c_{h0} x_h'' = 0$$

sein.

Eine Prüfung dieser Bedingung an quantitativen Messungen ist nicht möglich ohne genauere Kenntnis von der Natur des „inneren Parameters“ ω , da die x_h'' ohne dies schlechterdings

unbekannt sind. Es soll daher die vereinfachende Hypothese gemacht werden, daß bei regulären Kristallen die x_h'' alle einander gleich seien. Dies besagt, daß jede Art von Deformation dieselbe Änderung des „inneren Zustandes“ hervorruft, was bei regulären Kristallen einigermaßen plausibel erscheint. Bedingung (6) vereinfacht sich dann noch weiter zu

$$(7) \quad \sum_{(h)} c_{h6} = 0.$$

Diese Formel soll an Steinsalz geprüft werden, für welches die elastischen Konstanten bekannt sind. Die Gleitflächen sind Dodekaederflächen. Die x, z -Ebene unseres Koordinatensystems muß also mit einer solchen zusammenfallen. Das mit den kristallographischen Achsen zusammenfallende Koordinatensystem sei x', y', z' . Auf dieses bezogen sind die adiabatischen Elastizitätskonstanten:

$$(8) \quad c'_{11} = 4,88 \quad c'_{12} = c'_{21} = 1,43 \quad c'_{44} = 1,29$$

(in willkürlichen Einheiten), alle übrigen = 0. Die auf das Koordinatensystem x, y, z bezogenen Elastizitätskonstanten berechnen sich hieraus mit Hilfe der Winkel, die die beiden Achsenkreuze miteinander bilden. Es seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Winkel der x -Achse mit den x', y', z' -Achsen entsprechend $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ für y und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ für z . Dann findet man:

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 = 114^\circ 27' 4'', & \gamma_1 = 35^\circ 49' 44'', \\ \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 54^\circ 10' 16'', \\ \alpha_3 = \beta_3 = 45^\circ & \gamma_3 = 90^\circ. \end{cases}$$

Nach bekannten Formeln¹⁾ sind schließlich

$$(10) \quad \begin{cases} c_{16} = -0,57245, & c_{26} = -0,53723, & c_{36} = 0,43578, \\ c_{46} = 0,39874, & c_{56} = -0,36623, & c_{66} = 0,449307. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$(11) \quad \sum_{(h)} c_{h6} = -0,20208.$$

Nimmt man an, daß die Konstanten (8) auf 5 Proz. genau bestimmt seien, so sind die Werte (10) nur noch auf 50 Proz. genau, und da diese Größen in (11) additiv auftreten, so kann

1) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik.

der Fehler in (11) 100 Proz. und noch mehr erreichen. Innerhalb der Fehlergrenzen ist also Bedingung (7) erfüllt.

Aus (7) entstehen natürlich weitere Bedingungen, wenn der Kristall irgendeiner mit den Symmetrieverhältnissen verträglichen Deckbewegung unterworfen wird. Für diese ist der Nachweis nach dem obigen Muster gesondert zu erbringen.

§ 9. Beliebige Deformationen.

Die bisher diskutierte Bedingungsgleichung (11) § 7 für Plastizität ist bloß ein durch gewisse Vernachlässigungen gewonnener Spezialfall der allgemeinen Bedingung (6) § 6. Diese selbst beschreiben noch viel kompliziertere Bewegungen als die aus (11) § 7 folgenden einfachen, wie Translationen usw. sind. Die Symmetrie bleibt bei denselben im allgemeinen nicht erhalten. In der Tat sind Deformationen von Kristallen beobachtet¹⁾, bei welchen einzelne Flächen gekrümmt werden u. dgl. mehr.

An den Gleichungen (6) § 6 ist noch der Spezialfall von Interesse, wo die Größen $(\partial x_i / \partial \omega)_T$ klein sind gegenüber den übrigen darin auftretenden Konstanten. Die linke Seite kann dann in zwei Faktoren zerlegt werden, von denen der eine identisch ist mit (1) § 7 und gleich 0 gesetzt auf den Fall, der §§ 7, 8 führt. Dagegen liefert der andere Faktor, gleich 0 gesetzt, die Bedingung:

$$(1) \frac{c' + c'' \omega - r T}{c'' T} - \frac{c \omega}{c_{X_i} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\}} = 0.$$

Dieselbe enthält lediglich Materialkonstanten, aber keine Größen, welche sich auf die Art der Bewegung selbst beziehen wie (11) § 7. Ein Kristall, der unter geeigneten äußeren Kräften und Temperaturen (1) erfüllt, vermag also willkürliche, mit Störung der Symmetrie verbundene Deformationen zu erleiden, genau als wäre er ein amorpher Körper. Dies ist nach Milch und Ritzel bei Steinsalz über 200° der Fall.

1) O. Lehmann entdeckte zuerst derartiges an Gips und Ammoniumnitrat, deren Kristalle sich beliebig biegen lassen. Ferner konnte Rensch Säulchen von Steinsalz komprimieren, wobei die Seitenflächen sich krümmten.

Ferner gehören hierher die zähflüssigen Kristalle O. Lehmanns, z. B. Jodsilber. Da bei denselben die Elastizitätsgrenze so ist¹⁾, sie also Flüssigkeiten vorstellen, so muß (1) bei $\omega = 0$ erfüllt sein, also:

$$(2) \quad \frac{c' - rT}{c''T} - \frac{c_{\omega}}{c_{X_i} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{\omega} - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{\omega} \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\}} = 0.$$

Karlsruhe, Physikal. Institut der Techn. Hochschule.

1) Elastizitätsgrenze ist diejenige Kraft, bei der gerade eben Fließen eintritt. Bei geringeren Beanspruchungen verhält sich der Körper elastisch. (1) gibt an, wie groß bei vorgegebener Temperatur die „Verdrehung“ ω durch die Wirkung der Kraft X_i gemacht werden muß, bis Fließen eintritt. Diese beiden Werte T, ω bestimmen dann auch die zugehörige Kraft X_i selbst (da das System zweiparametrig ist). Ist die Elastizitätsgrenze $= 0$, so braucht nicht erst eine Verdrehung ω stattzufinden, bis Fließen eintritt; (1) muß also bei $\omega = 0$ gelten.

(Eingegangen 1. November 1914.)

5. Notiz über den Kapillardruck in Gasblasen; von Erwin Schrödinger.

[Aus dem II. physikalischen Institut der K. K. Universität in Wien.]

Eine Methode zur Bestimmung von Kapillarkonstanten besteht darin, daß man den Überdruck mißt, der eine Luftblase aus dem unteren Ende einer vertikal in die Flüssigkeit tauchenden Kapillare mit Kreisquerschnitt austreten läßt. Besonders in der von Jäger¹⁾ angegebenen Modifikation ist diese Methode großer Genauigkeit fähig, da sie die Bestimmung der spezifischen Kohäsion a^2 ²⁾ auf bloße Längenmessungen an festen Körpern zurückführt.

Die Beziehung zwischen „Abreißdruck“, Röhrenradius und spezifischer Kohäsion läßt sich nicht in geschlossener Form angeben, da die Differentialgleichung der „schweren“ kapillaren Rotationsfläche nicht durch bekannte Funktionen integrierbar ist. Man kann aber den Druck auf dem Wege sukzessiver Approximation³⁾ durch eine Reihe darstellen, welche nach Potenzen von r^2/a^2 fortschreitet (r bedeutet den Röhrenradius), vorausgesetzt, daß dieser Quotient klein ist gegen 1. Um a^2 zu finden, ist es bequem, den Gasdruck der Blase in Flüssigkeitshöhe auszudrücken und gegen das Niveau des Röhrenendes als Nullniveau zu messen. Diese Druckhöhe h ist in erster Annäherung gleich der Steighöhe der Flüssigkeit in derselben Kapillare, also annähernd $rh = a^2$, und daher r/h von

1) G. Jäger, Wien. Ber. 105. p. 425. 1896; C. E. Linebarger, Journ. Amer. Chem. Soc. 18. p. 514. 1896; J. Hock, Wien. Ber. 108. p. 1516. 1899.

2) Wir verstehen darunter, wie üblich, den Quotienten

$$\frac{2 \times \text{Kapillarkonstante}}{\text{Schwerebesch.} \times \text{Dichte}};$$

er hat bekanntlich die Dimension einer Fläche.

3) Zuerst verwendet von Fr. Neumann, Vorlesungen über Kapillarität Kap. III. § 4.

derselben Größenordnung wie r^2/a^2 . Man kann dann a^2 durch Reihenumkehrung nach steigenden Potenzen von r/h entwickeln.

Cantor¹⁾, Feustel²⁾ und Ferguson³⁾ haben die Entwicklung bis zum dritten Reihenglied durchgeführt. In eben diesem Gliede gehen ihre Resultate auseinander. Cantor findet

$$(1) \quad a^2 = r h \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{h} - \frac{1}{3} \frac{r^2}{h^2} \right),$$

Feustel gibt an

$$(2) \quad a^2 = r h \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{h} - \frac{r^2}{h^2} \right),$$

Ferguson endlich

$$(3) \quad a^2 = r h \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{h} + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{r}{h} \right)^{3/2} \right).$$

Die Ursache der Abweichung zwischen Cantor und Feustel ist ein bloßer Rechenfehler Cantors. Ein zweiter, methodischer, Fehler ist den beiden, übrigens identischen, Rechnungen gemeinsam. Ferguson rechnet etwas anders.⁴⁾ Der richtige Wert des fraglichen Gliedes in der Klammer ist, wie im folgenden gezeigt wird,

$$-\frac{1}{6} \frac{r^3}{h^3}.$$

Wir knüpfen an die Resultate der Steighöhenmethode an. Die Steighöhe h' für den Randwinkel 0 in einer Röhre vom Radius ϱ ist in dritter Näherung

$$(4)^5) \quad h' = \frac{a^2}{\varrho} - \frac{1}{3} \varrho + \frac{1}{3} \frac{\varrho^3}{a^2} (\lg 4 - 1).$$

1) M. Cantor, Ann. d. Phys. 47. p. 413. 1892.

2) R. Feustel, Ann. d. Phys. 16. p. 61. 1905.

3) A. Ferguson, Phil. Mag. 28. p. 135. 1914.

4) Fergusons Resultat ist in (3) nicht wörtlich wiedergegeben. Bei ihm kommt in dem fraglichen Glied die Größe a noch expliziert vor. Sie wurde sinngemäß durch die erste Näherung ($a^2 = r h$) ersetzt, da hierdurch nur ein Fehler von der Ordnung $\left(\frac{r}{h}\right)^{3/2}$ verursacht wird.

5) A. Winkelmann, Handbuch der Physik. Bd. I. p. 1144. Gleichung (38'' a). 1908.

Die Gleichung des *Meniskenmeridians* lautet, auf den *Scheitel* bezogen, in derselben Annäherung

$$(5)^1) \quad y(r') = \varrho - \sqrt{\varrho^2 - r'^2} + \frac{2}{3} \frac{\varrho^3}{a^2} \lg \frac{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - r'^2}}{2\varrho},$$

wo r' den *variablen* Radius (Abszisse), y die Ordinate bedeutet.

Obwohl hier der Randwinkel 0 vorausgesetzt ist, stellt (5), wenn man ϱ variieren läßt, *alle möglichen* „schweren“ kapillaren Rotationsflächen in der Nähe eines Schnittpunktes mit der Achse dar, denn diese bilden in ihrer Gesamtheit nur eine *einparametrische* Schar. Der Parameter ϱ bedeutet die Achsendifferenz der (ersten) vertikalen Tangente, h' allgemein den *Kapillardruck im Scheitel* (d. i. den Überschuß des hydrostatischen Druckes auf der konkaven Seite des Scheitels über den auf der konvexen Seite). Zu achten ist auf das Vorzeichen der Quadratwurzel. Wenn die Fläche, wie im folgenden, nach oben konkav ist, ist die Wurzel im Ursprung positiv (y -Achse nach aufwärts! vgl. Fig. 1). Hat man, längs der Kurve fortschreitend, den Punkt mit vertikaler Tangente ($r' = \varrho$) erreicht, so erhält man die weiteren, indem man das Zeichen der Wurzel wechselt und r' wieder abnehmen läßt.

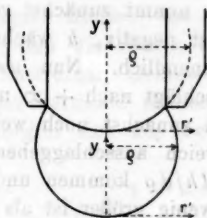


Fig. 1.

Wenden wir die Gleichungen auf unser Problem an. Während sich die Blase aus dem Rohr herauswölbt (in Fig. 1 sind zwei Stadien gezeichnet), ändert sich der Parameter ϱ und es handelt sich darum, denjenigen Wert von ϱ zu bestimmen, für welchen die Blase instabil wird und abreißt. Das wird beim Nachpressen von Luft in die Blase *dann* eintreten, wenn der Überdruck als Funktion von ϱ ein Maximum erreicht hat. Dabei muß aber dieser Überdruck gegen ein *konstantes* Niveau gemessen werden, also nicht etwa durch h' , sondern durch

$$(6) \quad h = h' + y(r),$$

wo r den Röhrenradius bedeutet. h ist dann der Überdruck im Innern gegen den hydrostatischen Druck im Niveau des

1) A. Winkelmann, l. e. Gleichung (39').

unteren Röhrenendes (mit „Druck“ sind natürlich immer die entsprechenden Flüssigkeitshöhen gemeint). Nach (6), (4) und (5) ist

$$(7) \quad h = \frac{a^2}{\varrho} + \frac{2}{3} \varrho - \sqrt{\varrho^2 - r^2} + \frac{2}{3} \frac{\varrho^3}{a^2} \left(\lg \frac{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - r^2}}{2\varrho} + \lg 2 - \frac{1}{2} \right).$$

Weiter

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dh}{d\varrho} &= -\frac{a^2}{\varrho^2} + \frac{2}{3} - \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - r^2}} + \frac{2\varrho^3}{a^2} \left[\lg \frac{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - r^2}}{2\varrho} + \lg 2 - \frac{1}{2} \right] \\ &\quad + \frac{2\varrho^2}{3a^2} \frac{r^2}{(\varrho + \sqrt{\varrho^2 - r^2})\sqrt{\varrho^2 - r^2}}. \end{aligned} \right.$$

Der Verlauf beim Herauswölben der Blase ist folgender. ϱ nimmt zunächst von großen Werten bis auf r ab. $dh/d\varrho$ ist negativ, h wächst also. Für $\varrho = r$ wird $dh/d\varrho$ negativ unendlich. Nun wechselt die Wurzel das Zeichen. $dh/d\varrho$ schlägt nach $+\infty$ um und da ϱ jetzt wieder zunimmt, wächst h zunächst noch weiter. Das dritte Glied ist in diesem Bereich ausschlaggebend. Und nun muß eine „0“-Stelle von $dh/d\varrho$ kommen und zwar bei einem Wert von ϱ , der nur wenig größer ist als r . Man findet ihn mit der angestrebten Genauigkeit (r^4/a^4), indem man die Summe aus dem ersten und dritten Glied gleich 0 setzt

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{a^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - r^2}} &= 0. \\ \varrho^2 - r^2 &= \frac{\varrho^6}{a^4} = \frac{r^6}{a^4} \\ \varrho &= r \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^4}{a^4} \right)^{1/3}. \end{aligned} \right.$$

Durch Eintragen von (9) in (7) erhält man mit Rücksicht darauf, daß die Wurzel in (7) negativ zu nehmen ist, für das Druckmaximum h

1) Setzt man diesen Wert in (5) ein und macht $r' = r$, so erhält man die Höhe der Blase beim Druckmaximum. Der Fergusonsche Wert (i. c. die Größe η !) ist falsch. Dagegen ist die Neigung der Randtangente bei Cantor und Feustel richtig. Man erhält sie durch Eintragen von (9) in $\left[\frac{dy(r')}{dr'} \right]_{r'=r}$. Ferguson hält, trotzdem er die früheren Arbeiten kennt, die Randtangente für vertikal! Vgl. u. p. 418.

$$(10) \quad \bar{h} = \frac{a^2}{r} + \frac{2}{3} r + \frac{1}{6} \frac{r^3}{a^2}$$

und durch Reihenumkehrung

$$(11) \quad a^2 = r \bar{h} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{\bar{h}} - \frac{1}{6} \frac{r^3}{\bar{h}^3} \right).$$

Dies ist die Endformel. Zeichenbedeutung:

$$a^2 \dots \text{spezifische Kohäsion} = \frac{2 \times \text{Kapillaritätskonstante}}{\text{Schwerebeschleunigung} \times \text{Dichte}},$$

$r \dots$ Röhrenradius,

$\bar{h} \dots$ Überdruck in der Blase gegen den hydrostatischen Druck im Niveau des Röhrenendes, gemessen im Augenblick des Abreißens und ausgedrückt in Flüssigkeitshöhe.

Bei der *Jägerschen Differentialmethode*¹⁾ wird die Höhen-differenz von zwei Röhren mit verschiedenen Radien, die in dasselbe Gefäß tauchen, so einreguliert, daß die Blasen bei gleichem Innendruck aus beiden Röhren austreten. Gemessen wird nach Entfernung der Flüssigkeit der vertikale Abstand der unteren Rohrenden ($\Delta \bar{h}$). Für ihn ergibt sich aus zwei Gleichungen wie (10)

$$(12) \quad \bar{h}_1 - \bar{h}_2 = \Delta \bar{h} = a^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{2}{3} (r_1 - r_2) + \frac{1}{6} \frac{r_1^3 - r_2^3}{a^2}$$

oder, wenn man a^2 im letzten Glied durch die erste Näherung ersetzt und nach a^2 auflöst,

$$(13) \quad a^2 = \frac{r_1 r_2 \Delta \bar{h}}{r_2 - r_1} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{r_2 - r_1}{\Delta \bar{h}} + \frac{1}{6} \frac{(r_2^3 - r_1^3)(r_2 - r_1)}{r_1 r_2 \Delta \bar{h}^3} \right).$$

Bis zum zweiten Gliede richtig wurde diese Formel kürzlich von Martin²⁾ angegeben. Im dritten Glied übernimmt Martin den Fehler Feustels. Doch hat dieses Glied bei seinen Versuchen, deren Resultate untereinander und mit denen früherer Beobachter sehr gute Übereinstimmung zeigen, nur geringen Einfluß, da er ziemlich enge Kapillaren verwendete.

Um die Richtigkeit auch des letzten Gliedes experimentell zu prüfen, stellte ich einige Versuche mit extrem weiten Kapillaren an (bis zu 5 mm Durchmesser!). Das allmähliche Anwachsen so großer Blasen läßt sich Schritt für Schritt bis zum

1) G. Jäger, l. c.

2) Erscheint demnächst in den Sitzungsber. d. Wien. Akad.

Augenblick des Abreißen verfolgen. Man erkennt deutlich, daß die Blase nicht genau kugelförmig ist, sondern in den tiefergelegenen Teilen schwächer gekrümmt („abgeplattet“), wie es die Theorie (Gleichung (5)) verlangt. Ferner wird die Frage, *welche Neigung die Randtangente im Augenblick des Abreißen besitzt* (vgl. p. 416, Anm. 1), auch durch die Anschauung dahin entschieden, daß sie die Vertikale bereits erheblich überschritten hat.

Auch die quantitativen Resultate, die mit Formel (13) erhalten wurden, waren durchaus befriedigend. Der Einfluß des fraglichen Gliedes betrug bis zu 3 Proz. Die Einstellung ist ungemein präzise, bei wiederholter Bestimmung von Δh betragen die Abweichungen nie mehr als einige Hundertstel Millimeter. Es scheint mir sogar, als ob durch die Verwendung weiterer Röhren (so weit, daß man mit der Entwicklung (13) eben noch sein Auslangen findet) für die Genauigkeit günstig wäre, da sich die Fehler gleichmäßiger auf die Bestimmung der Röhrenradien und der Höhendifferenz verteilen.

Ich beabsichtige die Versuche, die Ende Juli unterbrochen werden mußten, später fortzuführen, um ein umfangreicheres Material zur Prüfung der Formel zu gewinnen.

Zusammenfassung.

In der Näherungsformel für den Druck, bei dem eine Luftblase aus einer vertikalen Kapillare vom Radius r in eine Flüssigkeit austritt, wird das zweite Näherungsglied berechnet, das bisher dreimal falsch angegeben wurde. Einige Konsequenzen der Theorie werden experimentell bestätigt.

Raibl, 27. Oktober 1914.

(Eingegangen 31. Oktober 1914.)

6. Über die Dichte des flüssigen Wasserstoffs, den Brechungsexponenten und die Dispersion des flüssigen Wasserstoffs und des flüssigen Stickstoffs; von Herbert Augustin.

(Gekürzte Leipziger Dissertation.)

Inhaltsübersicht: Einleitung. I. Dichte des flüssigen Wasserstoffs. — II. Brechungsexponenten und Dispersion des flüssigen a) Wasserstoffs und b) Stickstoffs. — III. Berechnung der absoluten Werte der Brechungsexponenten und der Formkonstanten der Molekeln a) vom Wasserstoff, b) vom Stickstoff. — Schluß.

Einleitung.

Für die Abhängigkeit des Brechungsexponenten einer Substanz von ihrem Zustande bestehen drei Hauptformeln. Sie tragen der Beziehung zwischen dem Brechungsexponenten n und der variablen Dichte d einer gegebenen Substanz in folgender Weise Rechnung:

Die erste Formel

$$(I) \quad \frac{n-1}{d} = \text{Konst.}$$

haben zuerst Gladstone und Dale aus ihren Versuchen abgeleitet. Die zweite Formel

$$(II) \quad \frac{n^2-1}{d} = \text{Konst.}$$

stammt von Newton. Eine strengere Ableitung aus der Emanationstheorie gab ihr Laplace. Die dritte Formel

$$(III) \quad \frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d} = \text{Konst.}$$

wurde fast gleichzeitig von L. Lorenz in Kopenhagen und H. A. Lorentz in Leiden auf ganz verschiedenen Wegen gefunden. H. A. Lorentz leitete sie aus der elektromagnetischen Lichttheorie, L. Lorenz aus einer Annahme über die Ausbreitung der strahlenden Energie im Innern der Materie ab. Die experimentellen Ergebnisse haben bisher für Gase die

Gültigkeit dieser drei Formeln innerhalb der Beobachtungsfehler erwiesen. Bei Änderung des Aggregatzustandes findet man, daß den Beobachtungen die Formel (I) gut, am besten aber die Formel (III) entspricht.

O. Wiener¹⁾ hat in seiner Arbeit „Zur Theorie der Refraktionskonstanten“ die Grundlagen geprüft, auf denen die bisher allein theoretisch begründete Formel von Lorenz-Lorentz beruht. Hierbei findet er eine Größe u , die er die Formzahl u nennt, aus deren Größe sich gewisse Schlüsse auf die Gestalt der Molekeln der zu untersuchenden Substanz ziehen lassen.

Sind nämlich im besonderen Falle ε und d bzw. ε' und d' die Dielektrizitätskonstanten einer Substanz im gasförmigen bzw. im flüssigen Zustande, so nimmt nach Wiener die Lorenz-Lorentzsche Formel folgende Gestalt an:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + u} \cdot \frac{1}{d} = \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon' + u} \cdot \frac{1}{d'} (= C)$$

oder

$$u = \frac{\varepsilon' d' (\varepsilon - 1) - \varepsilon d (\varepsilon' - 1)}{d (\varepsilon' - 1) - d' (\varepsilon - 1)}.$$

Die Formzahl u tritt also an die Stelle der ursprünglichen 2. $u = 2$ würde bedeuten, daß die Molekeln der betreffenden Substanz reine Kugelform besitzen, während $u > 2$ den Grad der Abweichung von der Kugelform erkennen lassen würde.

Da die Voraussetzungen der Theorie um so mehr erfüllt sind, je tiefer die Temperatur liegt, war es von Interesse, die Konstante u für tiefste Temperaturen zu bestimmen. Auf Anregung des Herrn Prof. O. Wiener unternahm es daher der Verfasser, die Dichte und den Brechungsexponenten des flüssigen Wasserstoffs auf einige Zehntel pro Mille genau zu bestimmen. Bei dieser Gelegenheit wurde auch der Brechungsexponent des flüssigen Stickstoffs in der gleichen Weise untersucht. Bei der verwendeten Methode wurden die Brechungsexponenten zwischen Gas und Flüssigkeit beobachtet. Zur Gewinnung des absoluten Brechungsexponenten wurden die Brechungsexponenten des Gases bis zur Temperatur des Siede-

1) O. Wiener, Zur Theorie der Refraktionskonstanten. Berichte d. Math.-Phys. Klasse d. Kgl. Sächs. Gesellschaft d. Wiss. zu Leipzig 62. p. 256—277. 1910. Vgl. auch: O. Wiener, Die Theorie des Mischkörpers für das Feld der stationären Strömung. Abhandl. d. Math.-Phys. Klasse d. Kgl. Sächs. Gesellschaft d. Wiss. 32. Nr. VI. p. 581. 1912.

punktes extrapoliert. Aus diesem Grunde macht die rechnerische Verwendung der Ergebnisse am Schlusse dieser Arbeit noch keinen Anspruch auf unbedingte Gültigkeit, wenn man auch einige Schlüsse daraus ziehen kann. Eine endgültige Verwertung werden die vorliegenden Ergebnisse erst finden können nach Abschluß einer Untersuchung über die Dichte und den Brechungsexponenten des gasförmigen Wasserstoffs und Stickstoffs beim Siedepunkte, die im hiesigen Institute im Gange ist.

I. Dichte des flüssigen Wasserstoffs.

Durch Messung des bei der Verdunstung von 10 cem flüssigen H_2 erhaltenen Gases bestimmte Dewar¹⁾ die Dichte des flüssigen H_2 beim Siedepunkte zu wenig höher als 0,07. Später schlug Dewar zur Bestimmung der Dichten von flüssigem H_2 , flüssigem N_2 und flüssigem O_2 den umgekehrten Weg ein.²⁾ Er brachte ein bestimmtes Gasvolumen zur Verflüssigung und berechnete aus dem Volumen von Gas und Flüssigkeit die Dichte der Flüssigkeit. Für flüssigen H_2 bestimmte er so die Dichte beim Siedepunkte zu 0,0700. Aus den experimentellen Daten Dewars berechnete Hanssen³⁾, daß ein Liter flüssiger H_2 bei 20,5° abs. 69,69216 g wiegt. Es ist überflüssig, darauf hinzuweisen, daß es wenig Wert hat, aus Dewars Ergebnissen die Dichten der Gase auf 7 Stellen genau zu berechnen.

Um die Dichte des flüssigen H_2 bis auf einige Zehntel pro Mille genau zu bestimmen, ging der Verfasser von der Auftriebsmethode aus, die er für die Verwendung flüssiger Gase ausgestaltete. Zunächst galt es, für den Senkkörper das geeignete Material auszuwählen. Wegen seines geringen Ausdehnungskoeffizienten erschien geschmolzener Quarz am geeignetsten. Der Senkkörper ist massiv, zylindrisch und an den Enden abgerundet. Sein Volumen beträgt rund 23,3 cem. Er ist mittels eines 0,1 mm starken platinirten Platindrahtes an einer analytischen Wage aufgehängt, die Wägungen bis 0,1 mg zuläßt.

1) J. Dewar, The boiling point and density of liquid hydrogen. Journ. Chem. Soc. 73. p. 528. 1898.

2) J. Dewar, The densities of solid oxygen, nitrogen and hydrogen. Proc. Roy. Soc. 73. p. 251. 1904.

3) C. J. F. Hanssen, The weights of oxygen, nitrogen and hydrogen. Chemical News 92. p. 172. 1905. Siehe auch: Gmelin-Kraut, Handbuch der anorganischen Chemie 1. 3. p. 815 u. 826.

Um alle die im folgenden erklärten Hilfsvorrichtungen sicher befestigen zu können und um eine bequeme Justierung der ganzen Anordnung zu ermöglichen, die den Senkkörper und den Aufhänge Draht vor Berührungen mit irgendwelchen Apparateilen bewahrt, wurde für das Vakuumgefäß ein Verschluß konstruiert, der vielleicht etwas schwer und umständlich erscheint, der sich aber sehr gut bewährt hat.

Fig. 1 zeigt die Anordnung im Innern des Vakuumgefäßes *A* und seinen Verschluß mit den verschiedenen Hilfsvorrichtungen, während Fig. 2 das Schema der gesamten Versuchsanordnung wiedergibt.

Das Vakuumgefäß *A* von 7 cm Durchmesser und 90 cm Höhe hat zwei unversilberte Streifen zum Durchschauen, durch die der Senkkörper *B* beobachtet werden kann. Es paßt mit der Verlängerung *A'* seines inneren Teiles in den oben erwähnten Verschluß *C*, der mit entsprechenden Abänderungen nach Art der von Dr. Lilienfeld¹⁾ angegebenen Korkpackungen zur Verbindung doppelwandiger Rohre hergestellt ist. Der Kunstkorkzylinder *D* ist in das weite Metallrohr *E* eingezwängt und wird mittels der Messingdeckel *F*₁ und *F*₂ mit Hilfe von Schrauben um die Hälfte

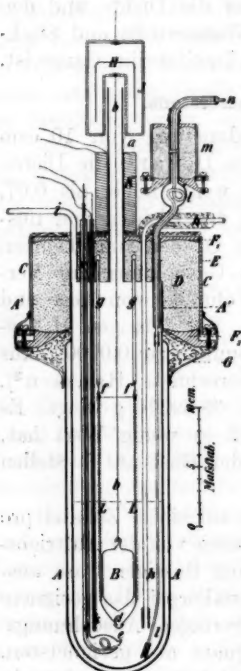


Fig. 1.

seiner ursprünglichen Höhe zusammengepreßt. Der Verschluß ist mit einem eisernen Bande an einem mit Stellschrauben versehenen Stativ befestigt. Nachdem alle Hilfsvorrichtungen, über die weiter unten noch zu sprechen ist, an dem Ver-

1) J. E. Lilienfeld, Das Laboratorium für tiefe Temperaturen (Luft- und Wasserstoffverflüssigung) des physikalischen Institutes der Universität Leipzig. Zeitschrift für komprimierte und flüssige Gase 18. p. 165, 185. 1910/11.

schlusse befestigt sind, wird das Vakuumgefäß von unten in den Verschuß gesteckt und durch die Gummikappe *G* gasdicht mit diesem verbunden. Der Raum zwischen Gummikappe, Gefäß und Verschuß wird mit Watte ausgefüllt.

Eine Hauptschwierigkeit besteht nun darin, den flüssigen H_2 sauber und klar zu erhalten. Bei einer derartigen Wägung muß der Aufhängedraht des Senkkörpers ohne Berührung mit anderen Apparatenteilen zur Wage geführt werden. Dabei ist es aber unvermeidlich, daß durch das Rohr *a* Luft in das Vakuumgefäß diffundiert und fest geworden den flüssigen H_2 trübt und sich auf dem Senkkörper festsetzt. Damit würde ein unberechenbarer Fehler in die Wägung eingehen. Diese Schwierigkeit wurde dadurch behoben, daß das Ende des Rohres *a* dauernd in Wasserstoffatmosphäre gehalten wurde. Folgende Anordnung machte dies möglich.

Über das Rohr *a* ist ein Becherglas *H* gestülpt, das den austretenden verdampften Wasserstoff zwingt, an seinem unteren Rande abzuziehen. Der leichte Wasserstoff wird sich zunächst oben im Becherglas ansammeln und so das Ende des Rohres *a* immer in Wasserstoffatmosphäre halten. Als vorteilhaft erwies es sich, außerdem noch mit einem Glasröhrchen gasförmigen H_2 in schwachem Strome unter das Becherglas zu leiten.

Der U-förmige Drahtbügel *J* greift um den unteren Rand des Becherglases herum und vermittelt die Aufhängung des Drahtes *b* an der Wagschale. Der auf *a* sitzende elektrische Ofen *K* erwärmt den abziehenden kalten H_2 so weit, daß er den Drahtbügel *J* nicht unter Zimmertemperatur abkühlt. Diese Anordnung ist nötig, weil sich auf dem Bügel durch Abkühlung sonst Wasser aus der umgebenden Luft kondensiert, wodurch die Wägungen unbrauchbar werden. Auf diese Weise gelingt es, den flüssigen H_2 im Vakuumgefäß dauernd klar zu halten.

Außer der Bohrung für das Vakuumgefäß und das Rohr *a* zur Durchführung des Aufhängedrahtes *b* besitzt der Verschuß noch einige Bohrungen für die folgenden Hilfsvorrichtungen.

Die Siedevorrichtung *c* nach Lilienfeld¹⁾ dient zur Verhinderung von Siedeverzügen in dem flüssigen Gase, die in der Flüssigkeit Temperaturschwankungen hervorrufen und da-

1) Siehe Anmerkung auf voriger Seite.

durch dem Senkkörper einen falschen Auftrieb erteilen würden. Diese Siedevorrichtung besteht aus einem doppelwandigen Rohre, in dem ein Kupferdraht bis auf den untersten Teil herabreicht. Er ist oben gasdicht eingeführt. Das doppelwandige Rohr verhindert, daß der Kupferdraht seine Wärme schon beim Eintritt in die Oberfläche des flüssigen Gases abgibt. Der Draht kommt erst an seinem unteren Ende mit der Flüssigkeit in Berührung und verursacht so durch seine gute Wärmeleitung ein regelmäßiges Aufsteigen von Gasblasen.

Gegen Beunruhigung durch aufsteigende Blasen in der siedenden Flüssigkeit ist der Senkkörper durch das weite Glasrohr *L* geschützt. An der unteren Spitze hat es eine kleine Öffnung *d*, durch die die Flüssigkeit außen und innen kommuniziert. Aufsteigende Blasen werden durch den kleinen Glashelm *e*, der mit drei kleinen Zapfen angeschmolzen ist, verhindert, durch *d* an den Senkkörper zu gelangen, und steigen seitlich in die Höhe. Diese Vorrichtung ermöglicht es, den Senkkörper in dem siedenden flüssigen Gase aufzuhängen, ohne daß er durch aufsteigende Blasen gestört wird. In der Tat konnten im Innern von *L* und am Senkkörper keine Gasblasen beobachtet werden. Dieses Rohr *L* hängt mit den eingeschmolzenen Platindrähten *f* an den drei Glasstäben *g*. Durch Biegen der Platindrähte läßt sich nötigenfalls sehr bequem eine Berührung des Senkkörpers mit *L* vermeiden. Die Stellschrauben des Statives dienen zur genaueren Einstellung des Ganzen. Kleine Beunruhigungen des Senkkörpers, die den Auftrieb um einige Zehntel Milligramm schwanken ließen, rührten wahrscheinlich von geringen Inhomogenitäten in dem flüssigen Gase her. Sehr erfolgreich wurde dagegen das Rohr *L* innen und außen mit dünner Kupfergaze bekleidet. Die gute Wärmeleitung des Kupfers verringerte ganz erheblich derartige Störungen, die auf geringe Temperaturschwankungen und Bildung von Schichten zurückzuführen sein dürften.

Bei den ersten Beobachtungen bestand das Rohr *L* nicht aus Glas, sondern aus Kupfer. Das hatte den Nachteil, daß der Senkkörper unsichtbar war. Es ist aber wichtig, ihn jederzeit beobachten zu können, sei es auf freie Aufhängung, sei es auf Anhaften von Gasblasen oder auf Festsetzen von gefrorener Luft. Die oben erwähnten kleinen Beunruhigungen des Senkkörpers konnten bei Verwendung des Kupferrohres nicht beobachtet werden.

Bei der geringen Verdampfungswärme des flüssigen H_2 muß das Innere des Gefäßes *A* vor dem Einfüllen des flüssigen Gases vorher gekühlt werden, um möglichst mit der kostbaren Flüssigkeit zu sparen. Zu diesem Zwecke wird, nachdem der Senkkörper mit Aufhängevorrichtung an der Wage austrariert ist, *a* und die Einfüllvorrichtung (*l* und *m*) durch einen Stopfen verschlossen und gasförmiger H_2 aus einer Stahlflasche *M* (Fig. 2) durch eine Kupferspirale *N* eingeleitet, die in flüssige

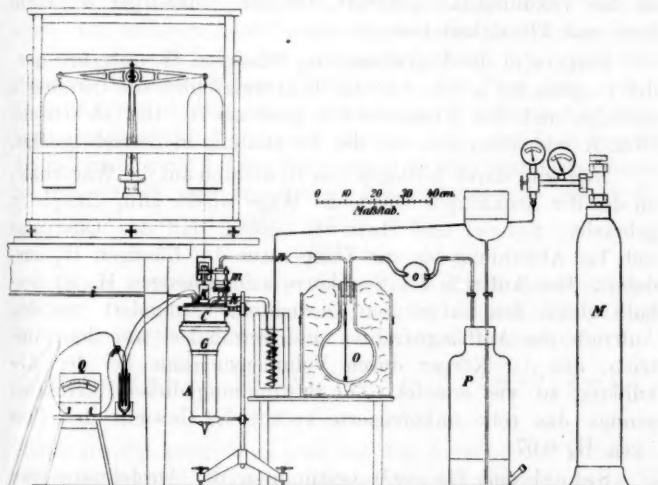


Fig. 2.

Luft taucht. Das auf die Temperatur der flüssigen Luft gekühlte Gas tritt nun durch das Rohr *h*, das durch Wattepackung vor Wärmezufuhr geschützt ist, in *A* ein, gibt seine Kälte ab und tritt durch *i* aus, da die übrigen Öffnungen bis auf das Abzugsrohr *i* geschlossen sind. Dabei zeigt ein an ein Galvanometer *Q* angeschlossenes Thermoelement *p* Konstantan-Eisen an, wie weit die Abkühlung vorgeschritten ist. Das Thermo-element ist vermittels des unten verblasenen Rohres *k* in *A* eingeführt. Diese Art der Vorkühlung hat den Vorteil, daß das Vakuumgefäß sehr gut mit gasförmigem H_2 durchspült wird und das flüssige Gas dann eine reine Wasserstoffatmosphäre vorfindet. Ist nun im Innern die Temperatur der

flüssigen Luft nahezu erreicht, so wird das doppelwandige Einfüllrohr *l* mittels der Korkpackung *m* (Lilienfeld, l. c.) und eines kurzen Gummischlauches an den doppelwandigen Heber *n* der Vorratsflasche *O* angeschlossen und flüssiger H_2 eingeleitet. Dabei wird mit dem Gummiball *o* gasförmiger H_2 durch ein U-förmiges Trockenrohr (auf der Fig. 2 nicht angegeben) aus dem kleinen Gasometer *P* angesaugt und in die Vorratsflasche *O* gepreßt (Fig. 2). Auf diese Weise wird flüssiger H_2 in das Vakuumgefäß gehebert, bis der Senkkörper 3—4 cm hoch mit Flüssigkeit bedeckt ist.

Dann wird die Einfüllung von flüssigem H_2 unterbrochen, der Stopfen bei *a* entfernt, das Becherglas über die Öffnung *a* gestülpt und das Abzugsrohr *i* geschlossen. Der elektrische Ofen *K* war schon während der Vorkühlung in Betrieb gesetzt.

Nun wird durch Auflegen von Gewichten auf die Wagschale, an der der Senkkörper hängt, die Wage wieder zum Einspielen gebracht. Scheel und Heuse¹⁾ fanden, daß das Quarzglas sich bei Abkühlung bis zur Temperatur des flüssigen H_2 ausdehnt. Der Auftrieb des Senkkörpers im flüssigen H_2 ist deshalb gleich den aufgelegten Gewichten, vermindert um den Auftrieb des Aufhängerdrahtes und vermindert um den Auftrieb, den der Körper durch Volumenzunahme bei der Abkühlung zu viel erleidet. Zur Bestimmung dieser Korrektur gerügt das rohe unkorrigierte spezifische Gewicht des flüssigen H_2 0,07.

Scheel und Heuse¹⁾ bestimmten die Ausdehnung von geschmolzenem Quarz zwischen $-252,5^\circ$ und $+16^\circ$. Nach ihren Beobachtungen beträgt der mittlere kubische Ausdehnungskoeffizient des Quarzglases zwischen $-252,5^\circ$ und $+16^\circ$

$$3\beta = -7,97 \cdot 10^{-7}.$$

Die Temperatur des siedenden Wasserstoffes bei 745,52 mm Druck²⁾ ergibt sich aus der von H. Kamerlingh Onnes und

1) K. Scheel und W. Heuse, Über die absolute Ausdehnung des Quarzglases bis zur Temperatur des flüssigen Wasserstoffs. Verhandl. d. Deutschen Phys. Gesellschaft 16. p. 1. 1914.

2) Der Druck von 745,52 mm herrschte bei der Bestimmung des Brechungsexponenten des flüssigen H_2 . Deshalb wurde er auch hier zugrunde gelegt; die beobachteten Dichten wurden dann auf diesen Druck reduziert.

W. H. Keesom angegebenen Dampfdruckkurve zu $20,26^{\circ}$ abs. oder $-252,83^{\circ}$ C.¹⁾

Die Beobachtungen mit dem Quarzkörper wurden mehrere Male wiederholt. Dabei war der reduzierte Barometerstand nur um einige Millimeter verschieden. Dementsprechend wurde auch ein etwas verschiedener Auftrieb im flüssigen H_2 gefunden. Die Unterschiede sind jedoch von der Größenordnung der Fehler; sie lassen also einen Schluß auf die Ausdehnung des flüssigen H_2 beim Siedepunkt nicht zu. Das wäre erst bei einem um mehrere Zentimeter verschiedenen Barometerstande möglich. Es stand aber bei geeigneten Luftdrücken gerade kein flüssiger Wasserstoff zur Verfügung. Die Rechnung wurde deshalb derart durchgeführt, daß aus den jeweiligen Auftriebsbestimmungen die Dichte des flüssigen H_2 berechnet wurde. Als Beispiel für die Art der Berechnung sei die Dichtebestimmung bei $b = 749,43$ mm angeführt. Der Quarzkörper erfuhr im flüssigen H_2 einen Gewichtsverlust von

$$1,6342 \text{ g.}$$

Dieser Auftrieb ist zu groß um den Auftrieb des Aufhänge-
drahtes. Dieser war 0,1 mm dick und mit 40 mm seiner Länge
im Wasserstoff. Der Auftrieb des Drahtes beträgt also

$$\pi r^2 \cdot l \cdot s = \pi \left(\frac{0,1}{2}\right)^2 \cdot 40 \cdot 0,07, \text{ wo } r = \frac{0,1}{2}; l = 40; s = 0,7$$

$$\text{oder } \pi r^2 \cdot l \cdot s = 0,022 \text{ mg.}$$

Ferner ist der Auftrieb zu groß um den Auftrieb der Volumen-
zunahme des Senkkörpers, infolge der Abkühlung um $+16$
 $-(-252,5) = 268,5^{\circ} = -t$.

Das Volumen des Senkkörpers betrug rund

$$v = 23,3 \text{ cm.}$$

Die Volumenzunahme beträgt also

$$\Delta = v \cdot \beta \cdot t$$

$$\Delta = 23,3 \cdot (-7,97 \cdot 10^{-7}) \cdot (-268,5)$$

$$\text{oder } \Delta = 4,99 \text{ mm}^3.$$

1) Bei Drucklegung der Dissertation wurde diese Arbeit von K. Onnes und W. H. Keesom (Comm. of Leiden, Nr. 137d) erst zugänglich. In der Dissertation ist deshalb nach einer Dampfdruckformel von Dewar (Proc. Roy. Inst. 17. p. 1. 1904) die Temperatur berechnet worden. Die in dem vorliegenden Auszug angegebenen Temperaturen beziehen sich, wo nichts anderes angegeben ist, auf die thermodynamische Skala mit dem absoluten Nullpunkt = $273,09$.

Das ergibt einen Auftrieb von

$$\Delta \cdot s = 4,99 \cdot 0,07 = 0,349 \text{ mg.}$$

Von dem beobachteten Auftrieb des Quarzkörpers müssen also abgezogen werden

$$\begin{array}{r} 0,022 \text{ mg} \\ + 0,349 \text{ „} \\ \hline 0,371 \text{ mg} \end{array}$$

oder rund 0,4 mg.

Wir erhalten schließlich den Auftrieb

$$m = 1,6342 - 0,0004 = 1,6338 \text{ g.}$$

Der Luftdruck beim Versuch betrug 749,43 mm, die Lufttemperatur 21,0° C.

Im Wasser von +16° betrug der Auftrieb des Senkkörpers

$$w = 23,3101 \text{ g,}$$

die Dichte des Wassers von +16° ist

$$Q = 0,99897_0,$$

die Dichte der Luft

$$\lambda = 0,001184.$$

Dann ergibt sich die Dichte des flüssigen H₂ bei $b = 749,43 \text{ m}$

$$d_f = \frac{m}{w} \cdot (Q - \lambda) + \lambda$$

$$d_f = 0,07112.$$

So wurden die folgenden Werte gefunden:

b	$t \text{ aus } b$	$d_f \text{ (beob.)}$	$d_f \text{ für } -252,88^\circ$
753,02	-252,78	0,07087	0,07092
754,38	-252,78	0,07091	0,07096
749,43	-252,80	0,07112	0,07115
750,35	-252,80	0,07115	0,07118

Mittel 0,07105

Dewar¹⁾ bestimmte die Dichte des flüssigen Wasserstoffs bei verschiedenen Drucken. Er fand bei 760 mm $d = 0,0700$ und bei 76 mm $d = 0,0755$. Diesen Drucken entsprechen nach der oben angeführten Dampfdruckformel die Temperaturen -252,76° C. und -258,55° C. Für eine Temperaturniedrigung

1) Vgl. Anm. 2 auf p. 421.

von 1° findet er also eine Zunahme der Dichte um $9 \cdot 10^{-4}$. Nach K. Onnes und C. A. Crommelin¹⁾ ergibt sich für 1° Temperaturerniedrigung eine Zunahme der Dichte um 10^{-8} . Nach den vorliegenden Beobachtungen müßte aber die Zunahme der Dichte bei 1° Temperaturerniedrigung größer sein. Der Temperaturunterschied bei den einzelnen Beobachtungen ist aber zu klein, als daß man einen Schluß auf die Temperaturabhängigkeit der Dichte ziehen könnte. Die beobachteten Dichteunterschiede dürften daher zum Teil auf eine ungleichförmige Temperatur des flüssigen Wasserstoffs zurückzuführen sein.

Nun herrschte bei der weiterhin beschriebenen Bestimmung des Brechungsexponenten des flüssigen Wasserstoffs ein Druck von 745,52 mm, dem eine Temperatur von $-252,83^{\circ}$ C entspricht. Deshalb wurden die beobachteten Dichten nach der von Dewar bzw. K. Onnes und C. A. Crommelin gefundenen Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur für $-252,83^{\circ}$ C. berechnet und aus diesen Werten das Mittel genommen (letzte Spalte der vorstehenden Tabelle). So ergibt sich der Mittelwert

$$d_f = 0,07105 \text{ bei } 745,52 \text{ mm und } -252,83^{\circ} \text{ C.}$$

mit einem mittleren Fehler von sechs Einheiten der letzten Stelle.

K. Onnes und C. A. Crommelin bestimmten auf anderem Wege in der erwähnten Arbeit die Dichte des flüssigen Wasserstoffs. Sie stellen eine Formel auf, nach der sich die Dichte bei $-252,83^{\circ}$ zu 0,07093 berechnet. Mit Rücksicht auf die ganz verschiedene Beobachtungsweise ist die Übereinstimmung recht gut zu nennen.

II. Brechungsexponenten und Dispersion des flüssigen Wasserstoffs und Stickstoffs.²⁾

a) *Wasserstoff*. Den Brechungsexponenten des flüssigen H_2 bestimmte Dewar³⁾ im Jahre 1901, indem er den relativen

1) Comm. of Leiden, Nr. 137d. Auch diese Arbeit wurde erst bei Drucklegung der Dissertation zugänglich und konnte nur in einer Fußnote erwähnt werden. — Nach dieser Arbeit und der von Dewar ergeben sich für die letzte Spalte der Tabelle dieselben Korrekturen.

2) Mit Abänderungen und Erweiterungen aus den Berichten der Math.-Phys. Klasse d. Kgl. Sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Leipzig, Sitzung vom 21. Juli 1913.

3) J. Dewar, Bakerian lecture. The nadir of temperature an allied problems. Proc. Roy. Soc. 68. p. 361. 1901.

Unterschied der Brennweite eines kugelförmigen Vakuumgefäßes maß, das er nacheinander mit Wasser, flüssigem Sauerstoff und flüssigem Wasserstoff füllte. Er erhielt den Wert 1,12.

Zur Bestimmung des Brechungsindex von flüssiger Luft und flüssigem Stickstoff verwendeten 1892 K. Olszewsky und A. Witkowsky¹⁾ und 1893 Liveing und Dewar²⁾ die von E. Wiedemann³⁾ angegebene Methode der Totalreflexion.

Um den Brechungsindex und die Dispersion des flüssigen H_2 bis auf einige Zehntel pro Mille genau zu bestimmen, wurde vom Verfasser diese Methode weiter ausgebaut.

Abweichend von den erwähnten Forschern verwendet der Verfasser von vornherein Licht bestimmter Wellenlänge und beobachtet dann mit einem Fernrohre mit Gaußschem Okular die Grenzlinie hell-dunkel. Praktisch ist dies jedenfalls von großem Vorteil. Denn durch das Gaußsche Okular läßt sich die Gasplatte, wie die mit einem Gaszwischenraum aufeinander gekitteten Glasplatten kurz genannt werden sollen, viel genauer justieren. Dann ist es auch sicherer, die Grenzlinie hell-dunkel, wenn sie durch aufsteigende Gasblasen etwas verwaschen erscheint, mit einem Fadenkreuz einzustellen, als im Gesichtsfelde eines Spekrometers den Eintritt von Dunkelheit festzustellen, zumal wenn, wie es bei einem Vakuumgefäß ohne Planfenster unvermeidlich ist, die austretenden Strahlen Verzerrungen erleiden, welche die Schärfe der Trennungslinie abermals ungünstig beeinflussen.

Über die Versuchsanordnung (Fig. 3) ist folgendes zu bemerken. Die planparallele Gasplatte a , an der die Totalreflexion statthat, wurde nach den Angaben von Liveing und Dewar hergestellt. Sie besteht aus zwei sehr genau planparallel geschliffenen Glasplatten von der Größe $25 \times 30 \times 3$ mm, die durch ein mit Eiweiß getränktes Stück dünnen Kopier-

1) K. Olszewsky und A. Witkowsky, *Propriétés de l'oxygène liquide*. Anzeiger d. Akad. d. Wiss. in Krakau 1892. p. 340. — Sur la dispersion de la lumière dans l'oxygène liquide. Derselbe 1894. p. 242.

2) Liveing und Dewar, On the refractive indices of liquid nitrogen and air. *Phil. Mag.* **36**, p. 328. 1893. — On the refraction and dispersion of liquid oxygen and the absorption spectrum of liquid air. *Phil. Mag.* **40**, p. 268. 1895.

3) E. Wiedemann, Methoden zur Bestimmung der Brechungsindex von Flüssigkeiten und Glasplatten. *Poggendorffs Annalen* **158**, p. 375. 1876.

papieres, welches in der Mitte ausgeschnitten ist, aufeinander gekittet sind. Diese Kittung wurde so durchgeführt, daß das Kopierpapier nicht zu stark mit Eiweiß getränkt ist. Dadurch wird erreicht, daß das Kopierpapier nicht in seiner ganzen Ausdehnung fest an der Glasplatte haftet, sondern daß zwischen Stellen, an denen optischer Kontakt stattfindet, wieder solche

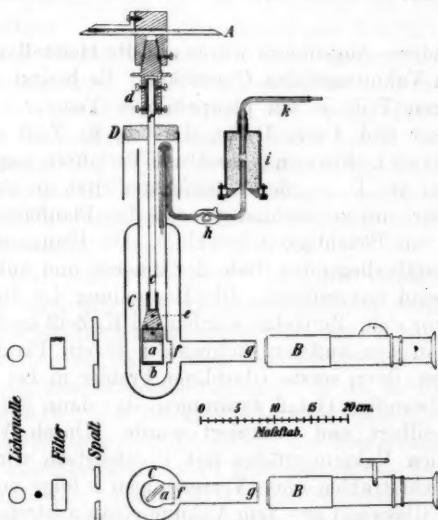


Fig. 3.

sich befinden, die als kapillare Zwischenräume anzusprechen sind. Eine Untersuchung der auf diese Weise aufeinander gekitteten Platten im reflektierten Licht zeigt dies sehr deutlich. Wiederholte Versuche ergaben, daß eine solche Gasplatte wohl flüssigkeitsdicht, aber nicht gasdicht ist. Es ist also sicher, daß während des Versuches im Innern der Gasplatte Atmosphärendruck herrscht.

Diese Gasplatte steckt in einem dünnen Kupferrahmen *b*, der an einem Glasstabe *c* befestigt ist. Dieser ist 8,5 mm dick und wird von einem horizontalen Teilkreis *A* getragen, mit dem man mit Schätzen auf 10 Sekunden genau ablesen kann. Mit den Schrauben *d* wird der Glasstab genau in die Drehachse

des Teilkreises gebracht, während die Gasplatte mit Hilfe der Schraube *e* und des mit einem Gaußschen Okular versehenen Fernrohres *B* senkrecht zu diesem und parallel zur Drehungsachse eingestellt wird. Dann wird vorsichtig das Vakuumgefäß *C* von unten über die Gasplatte geschoben. Auf diese Weise ist eine sehr genaue Justierung möglich, die jederzeit kontrolliert werden kann, ohne daß an dem Aufbau etwas geändert werden müßte.

Besonderes Augenmerk wurde auf die Herstellung des eben erwähnten Vakuumgefäßes *C* gerichtet. Es besitzt am inneren und äußeren Teile je ein planparalleles Fenster von 30 mm Durchmesser und 3 mm Dicke, die von K. Zeiß nach einem von Dr. Hans Lehmann gefundenen Verfahren angeschmolzen sind (*f* und *g*). Das äußere Planfenster sitzt an einem 10 cm langen Rohr, um zu verhindern, daß das Planfenster sich abkühlt und mit Feuchtigkeit beschlägt. Die Planfenster und die ihnen gegenüberliegenden Teile der inneren und äußeren Glaswandung sind unversilbert. Die Herstellung des Gefäßes ging wie folgt vor sich. Zunächst wurden bei K. Zeiß an den inneren Teil und an den äußeren Rohransatz je ein Planfenster angeschmolzen, dann setzte Glasbläser Preßler in Leipzig daraus das doppelwandige Gefäß zusammen, das dann bei Burger in Berlin versilbert und evakuiert wurde. Durch Verwendung eines solchen Vakuumgefäßes mit Planfenstern wird erreicht, daß die Lichtstrahlen ohne Verzerrungen infolge von Unebenheiten der Glaswand aus dem Vakuumgefäß austreten. In dem auf Unendlich eingestellten Fernrohre ist deshalb jederzeit eine gerade scharfe Trennungslinie hell-dunkel zu sehen, sobald die Gasplatte in der Stellung der Totalreflexion sich befindet. Die Planfenster lassen es auch zu, die Justierung der Gasplatte jederzeit mit dem Gaußschen Okular nachzuprüfen, sei es vor, während oder nach der Versuchsreihe.

Der Glasstab trägt fest verbunden die Glasglocke *D*; dadurch wird erreicht, daß die Öffnung des Vakuumgefäßes immer in Wasserstoffatmosphäre gehalten wird. Sie dient also dem gleichen Zwecke wie bei der Dichtebestimmung das Becherglas *H*, welches über das Rohr *a* (Fig. 1) gestülpt ist. Auch hier wird der verdampfende Wasserstoff gezwungen, am unteren Ende der Glasglocke abzuziehen. Ebenso wurde hier wie bei der Dichtebestimmung außerdem noch mit einem Glasröhrchen

gasförmiger Wasserstoff in schwachem Strome unter die Glasglocke geleitet.

Das doppelwandige Rohr *h* greift unter die Glasglocke und führt ins Innere des Gefäßes. Es kann mit einer Korkpackung *i* an den doppelwandigen Heber *k* der Vorratsflasche angeschlossen werden.

Durch die Verwendung der Glasglocke als Verschluß des Vakuumgefäßes und der doppelwandigen Einfüllvorrichtung, die auch zur Vorkühlung benutzt wird, kann man das Gefäß vorkühlen, flüssigen Wasserstoff einfüllen und nach Bedarf während des Versuches nachfüllen, ohne an der Justierung etwas zu ändern. Das letztere ist wichtig, weil es sonst kaum möglich ist, reproduzierbare Werte zu erhalten. W. Meißner¹⁾ der ebenfalls über das Lichtbrechungsvermögen des flüssigen Wasserstoffs gearbeitet hat, konnte seine Gasplatte nicht in dieser Weise justieren.

Bevor man jedoch flüssigen Wasserstoff einfüllt, muß das Gefäß sehr vorsichtig und langsam vorgekühlt werden, da das innere angeschmolzene Planfenster sonst sehr leicht zerspringt. Zu diesem Zwecke wird wieder Wasserstoff aus einer Stahlflasche durch eine Kupferspirale geleitet, die in flüssige Luft taucht und durch die Korkpackung *i* an das doppelwandige Rohr *h* angeschlossen ist. Dieser auf die Temperatur der flüssigen Luft gekühlte Wasserstoff tritt nun in das Vakuumgefäß ein und kühlt dieses nicht nur ab, sondern verdrängt auch im Verlaufe der Abkühlung, die ungefähr eine Stunde dauert, die Luft aus der Gasplatte. Der Verlauf der Kühlung wird auch hier mit einem Thermoelement Konstantan-Eisen beobachtet.

Ist die Temperatur der flüssigen Luft im Vakuumgefäß nahezu erreicht, so wird die Kupferspirale von der Korkpackung entfernt und an ihrer Stelle der doppelwandige Heber der Vorratsflasche angeschlossen. Dann wird mit einem Gummiball gasförmiger Wasserstoff aus einem kleinen Gasometer durch ein U-förmiges Trockenrohr angesaugt und in die Vorratsflasche gepreßt, bis das Gefäß mit flüssigem Wasserstoff gefüllt ist. Es muß nur darauf geachtet werden, daß bei weitem langsamer und vorsichtiger eingefüllt wird als bei der Dichtebestimmung,

1) W. Meißner, Über das Lichtbrechungsvermögen des flüssigen Wasserstoffs. Verhandl. d. Deutschen Phys. Gesellschaft 15. p. 540. 1913.

weil das Planfenster immerhin noch einen Temperaturunterschied von rund 70° zu überwinden hat.

Als Lichtquelle diente eine Quecksilberamalgame-Quarzlampe von Heräus und eine für Längsdurchsicht geeignete Wasserstoffröhre. Zwecks Regulierung der Helligkeit im Gesichtsfelde des Fernrohres und um das Licht parallel aus dem Vakuumgefäß treten zu lassen, war zwischen Lichtquelle und Vakuumgefäß in dessen Brennnlinie ein breiter verstellbarer Spalt aufgestellt.

Der Teilkreis, das Einfüllrohr, das Vakuumgefäß und das Fernrohr waren an einem schweren eisernen Stativ befestigt, das eine Verrückung der einzelnen Teile des Aufbaues gegeneinander nicht zuließ.

Beobachtet wurde der doppelte Winkel der Totalreflexion an der Gasplatte. Das Fadenkreuz ließ sich sehr bequem auf die Grenzlinie hell-dunkel einstellen. Die Beobachtungen fanden auch in den um 180° gedrehten Stellungen der Gasplatte statt. Es wurden die Brechungsexponenten zwischen flüssigem und gasförmigem Wasserstoff bestimmt.

Auf die Verwendung eines doppelwandigen Siederohres konnte hier verzichtet werden, da jederzeit ein lebhaftes Sieden beobachtet werden konnte. Im Verhältnis zu der geringen Größe des inneren Gefäßes ist nämlich ein so großer Teil der Glaswandung unversilbert, daß durch Wärmestrahlung dem flüssigen Wasserstoff genügend Wärme zugeführt wird.

Die gesamte Anordnung wurde mehrere Male mit gewöhnlichem destilliertem Wasser durchprobiert, und zwar derart, daß zwischen den einzelnen Beobachtungsreihen des doppelten Winkels der Totalreflexion die ganze Anordnung auseinandergenommen und von neuem zusammengesetzt und justiert wurde. Dabei ergab sich, daß die Beobachtungen innerhalb der Fehlergrenze reproduzierbar waren. In gleicher Weise wurden die Beobachtungen für flüssigen Wasserstoff wiederholt. Der mittlere Fehler von $n - 1$ beträgt 0,2 pro Mille.

Folgende Lichtfilter für die einzelnen Wellenlängen wurden verwendet: Für Wasserstoff rot $\lambda = 656,3 \mu\mu$ und Quecksilber gelb $\lambda = 579,0 \mu\mu$ gesättigte Kaliumbichromatlösung; für Hg grün $\lambda = 546,1 \mu\mu$ Kaliumchromat und Didymiumchlorid; für Hg blau $\lambda = 435,9 \mu\mu$ Kupferoxydammoniak und für Hg violett $\lambda = 404,7 \mu\mu$ Jod in Tetrachlorkohlenstoff.

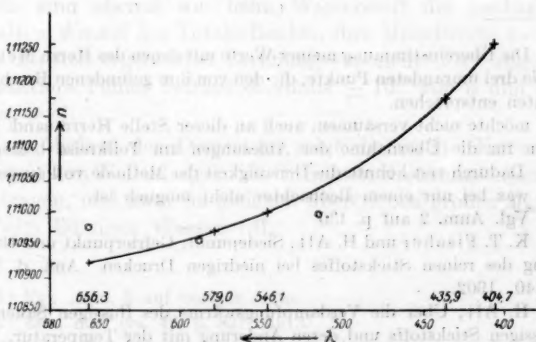
Diese Filter löschten die unerwünschten Wellenlängen sehr

gut aus, bzw. sie schwächten sie so stark, daß im Fernrohre praktisch nur die für die gewünschte Wellenlänge auftretende Trennungslinie hell-dunkel sichtbar war.

Der auf 0° reduzierte Barometerstand während der Beobachtungen betrug 745,52 mm. Dem entspricht, wie schon weiter oben bei der Dichtebestimmung angegeben, eine Temperatur von $-252,83$.

In der folgenden Tabelle sind zunächst die beobachteten doppelten Winkel der Totalreflexion angegeben. Sie sind bereits Mittelwerte aus den um 180° verschiedenen Beobachtungen. Dann folgen ihre Mittelwerte 2α und α . α besitzt einen mittleren Fehler von $\pm 10''$. n_f' ist der sich aus α ergebende Brechungs-exponent. Der Fehler von $n_f' - 1$ beträgt 0,2 pro Mille.

λ	656,3	579,0	546,1	435,9	404,7
	128° 43' 30"	128° 36' 30"	128° 33' 0"	128° 10' 35"	128° 0' 35"
	43' 40"	36' 50"	33' 10"	10' 35"	127° 59' 25"
	42' 50"	36' 45"	32' 40"	10' 10"	127° 59' 10"
	42' 30"	36' 50"	33' 0"		
	43' 40"				
2α	128° 43' 14"	128° 36' 44"	128° 32' 58"	128° 10' 27"	127° 59' 43"
α	64° 21' 37"	64° 18' 22"	64° 16' 29"	64° 5' 13"	63° 59' 51"
n_f'	1,10924	1,10974	1,11003	1,11179	1,11262



Dispersion des flüssigen Wasserstoffs.

Fig. 4.

Den Verlauf der Dispersion des flüssigen Wasserstoffs zeigt die erste Kurve; als Abszissen sind Wellenlängen, als Ordinaten die Brechungsexponenten aufgetragen, und zwar in übertrieben großem Maßstabe, um die Krümmung der Dispersionskurve besser hervortreten zu lassen (1 mm entspricht einer Einheit der vierten Dezimale).¹⁾

b) *Stickstoff*. An Beobachtungen über den Brechungsexponenten des flüssigen Stickstoffs liegt bisher nur eine Untersuchung von Liveing und Dewar²⁾ vor. Sie verwendeten Stickstoff, der mit 5 Proz. Sauerstoff verunreinigt war. Mittels der Methode der Totalreflexion fanden sie für Natriumlicht $n = 1,2058$.

Der Verfasser unternahm es nun, die Dispersion des reinen flüssigen Stickstoffs in der gleichen Weise wie die des flüssigen Wasserstoffs zu untersuchen. In Stahlflaschen käuflicher Stickstoff kam hierfür nicht in Frage, weil dieser noch mit einigen Prozent Verunreinigungen behaftet ist. Ein Prozent kommt allein auf Argon, das sich vom Stickstoff nicht trennen läßt. Es galt also, den Stickstoff möglichst rein in größeren Mengen chemisch darzustellen. Zu diesem Zwecke wurde die von K. T. Fischer und H. Alt³⁾ nach den Angaben von Knorre⁵⁾ abgeänderte Methode verwendet.

Die Verflüssigung geschieht in einem Verflüssigungsapparat wie ihn auch Fischer und Alt verwendet haben.

1) Die Übereinstimmung meiner Werte mit denen des Herrn Meißner zeigen die drei umrandeten Punkte, die den von ihm gefundenen Brechungsexponenten entsprechen.

Ich möchte nicht versäumen, auch an dieser Stelle Herrn cand. phys. Hofmann für die Übernahme der Ablesungen am Teilkreise bestens zu danken. Dadurch erst konnte die Genauigkeit der Methode voll ausgenutzt werden, was bei nur einem Beobachter nicht möglich ist.

2) Vgl. Anm. 2 auf p. 430.

3) K. T. Fischer und H. Alt, Siedepunkt, Gefrierpunkt und Dampfspannung des reinen Stickstoffes bei niedrigen Drucken. *Ann. d. Phys.* **9**. p. 1140. 1902.

4) H. Alt, Über die Verdampfungswärme des flüssigen Sauerstoffs und flüssigen Stickstoffs und deren Änderung mit der Temperatur. *Ann. d. Phys.* **19**. p. 739. 1906.

5) G. v. Knorre, Über die Darstellung von Stickstoff aus Ammoniumnitrit. *Die Chemische Industrie* **25**. p. 531, 550. 1902.

Während die Verflüssigung vor sich geht, wird das doppelwandige Gefäß, in dem die Gasplatte sich befindet, in der gleichen Weise wie bei der Untersuchung mit flüssigem Wasserstoff vorgekühlt. Dann wird die Kupferspirale entfernt, an ihrer Stelle der doppelwandige Heber des Verflüssigungsapparates angeschlossen und trockener gasförmiger Stickstoff in den Verflüssigungskolben gepreßt, bis das Gefäß mit flüssigem Stickstoff gefüllt ist. Dann gehen die Beobachtungen des doppelten Winkels der Totalreflexion gerade so vor sich wie beim flüssigen Wasserstoff. Auch hier empfiehlt es sich, gasförmigen Stickstoff in schwachem Strome unter die Glasglocke *D* zu leiten.

Als Lichtquelle diente wieder die schon erwähnte Quecksilberlampe und die Wasserstoffröhre; ebenso wurden die gleichen Lichtfilter verwendet.

Die Dampfdrucke von flüssigem Stickstoff haben Fischer und Alt¹⁾ und H. v. Siemens²⁾ gemessen. Fischer und Alt geben als Schmelzdruck 94,0 mm, H. v. Siemens 93,5 mm an (v. Estreicher ebenfalls 93,5 mm). Da nun bei einer Verunreinigung mit Sauerstoff der Schmelzdruck des Stickstoffs niedriger werden muß, so glaubt der Verfasser, sich für die Beobachtungen von Fischer und Alt entscheiden zu dürfen, zumal in der Arbeit von H. v. Siemens eine kritische Erklärung der verschiedenen Schmelzdrucke nicht gegeben ist. Nach Fischer und Alt entspricht demnach einem Druck von 745,12 mm eine Temperatur von 195,89°.³⁾ In der folgenden Tabelle sind ebenso wie beim Wasserstoff die beobachteten doppelten Winkel der Totalreflexion, ihre Mittelwerte 2α und α sowie die sich ergebenden Brechungsexponenten n' angegeben. Der mittlere Fehler beträgt ebenfalls $\pm 10''$ von α und $0,2\%$ von $n' - 1$.

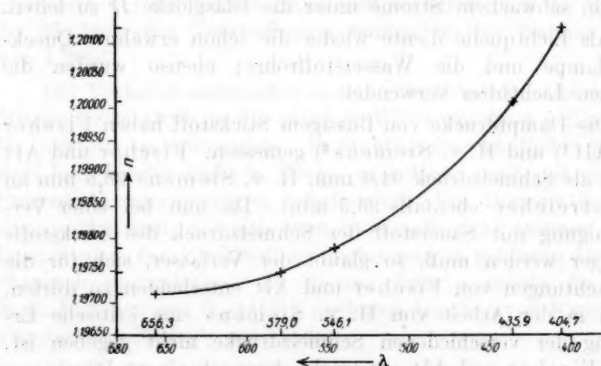
Den Verlauf der Dispersion zeigt die zweite Kurve. Als Abszissen sind Wellenlängen, als Ordinaten Brechungsexponenten aufgetragen, und zwar im gleichen übertrieben großen Maßstabe wie beim flüssigen Wasserstoff.

1) Vgl. Ann. 3 auf voriger Seite.

2) Ann. d. Phys. 42, p. 831. 1913.

3) Diese Temperatur ist zwar mit dem internationalen Wasserstoffthermometer gemessen, doch beeinflusst die Korrektur auf die thermodynamische Skala ($-195,78$) die weitere Rechnung nicht.

λ	656,3	579,0	546,1	435,9	404,7
	113° 17' 50"	113° 15' 25"	113° 11' 20"	112° 52' 20"	112° 42' 0"
	17' 45"	15' 5'	11' 30"	52' 20"	42' 20"
	18' 0"	15' 20'	11' 30"	52' 20"	43' 0"
2 α	113° 17' 52"	113° 15' 17"	113° 11' 27"	112° 52' 20"	112° 42' 27"
α	56° 38' 56"	56° 37' 38"	56° 35' 44"	56° 26' 10"	56° 21' 13"
n_d'	1,19715	1,19746	1,19788	1,20010	1,20125



Dispersion des flüssigen Stickstoffs.

Fig. 5.

III. Berechnung der absoluten Werte der Brechungsexponenten und der Formkonstanten der Molekeln.

a) *Wasserstoff*. Wenn auch das Hauptgewicht dieser Arbeit in ihrem experimentellen Teile liegt und die endgültige theoretische Verwertung der vorliegenden Ergebnisse erst erfolgen kann, wenn die Dichte und die Dispersion des gasförmigen Wasserstoffs und Stickstoffs bei ihren Siedepunkten bekannt sind, so dürfte es doch von Interesse sein, zu untersuchen, was die bisher vorliegenden Ergebnisse zur Berechnung der Wienerschen Formenzahl n leisten.

Zu diesem Zwecke muß der Brechungsexponent des Gases beim Siedepunkt extrapoliert werden, um den absoluten Brechungsexponenten der Flüssigkeit zu gewinnen. Dabei

fragt es sich, ob im vorliegenden Falle neben der Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Dichte ein spezifischer Temperatureinfluß vorhanden ist. Nach Debye¹⁾ ist ein solcher für tiefe Temperaturen zu bezweifeln. In der Tat liefern auch die vorliegenden Beobachtungen keinen Anhalt für einen solchen Einfluß, so daß mit der Konstanz des Refraktionsäquivalentes gerechnet werden soll, eines Äquivalentes, in dem aber die Lorentzsche Konstante 2 durch die allgemeine u ersetzt werde.

Nach Scheel²⁾ folgt der Brechungsexponent n_g des Wasserstoffs bei 0° und 760 mm Druck folgender vereinfachter Dispersionsformel (λ in μ):

$$(n_g - 1) \cdot 10^7 = 1358 \cdot 3 + 9,05 \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ist die zugehörige Dichte d_g des Wasserstoffs bezogen auf Wasser von 4°

$$d_g = 0,00008985$$

und ist

$$(I) \quad \frac{n_g^2 - 1}{n_g^2 + u} \cdot \frac{1}{d_g} = C,$$

so läßt sich, unter Benutzung der Ergebnisse Scheels über den Brechungsexponenten n_1 des Wasserstoffs bei $-188,25^\circ$ und 758,93 mm, hieraus die zugehörige Dichte δ_1 des Wasserstoffes berechnen. Es ist dann

$$\frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + u} \cdot \frac{1}{\delta_1} = C$$

oder

$$(II) \quad \delta_1 = \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + u} \cdot \frac{1}{C}.$$

Nach der oben erwähnten Dispersionsformel ergeben sich bei 0° und 760 mm folgende Brechungsexponenten n_g :

λ in $\mu\mu$	656,3	579,0	546,1	435,9
n_g	1,0001379	1,0001385	1,0001389	1,0001496 $\pm 10^{-7}$.

1) P. Debye, Einige Resultate einer kinetischen Theorie der Isolatoren. Phys. Zeitschr. 13. p. 97. 1912.

2) K. Scheel, Bestimmung der Brechungsexponenten von Gasen bei Zimmertemperatur und bei der Temperatur der flüssigen Luft. Verhandl. d. Deutschen Phys. Gesellschaft 9. p. 24. 1907.

Bei $-188,25^{\circ}$ und $758,93$ mm fand Scheel folgende Brechungsexponenten ν_1 :

$$\nu_1 = 1,0004422^1); 1,0004459; 1,0004471; 1,0004545 (\pm 4 \cdot 10^{-7}).$$

Setzt man in Verfolgung eines stufenweisen Annäherungsverfahrens zunächst $u = 2$, so läßt sich hieraus und nach (I) und (II) die zugehörige Dichte δ_1 berechnen. Als Mittelwert ergibt sich

$$0,0002881$$

$$2898$$

$$2892$$

$$2904$$

$$\delta_1 = 0,0002892 (\pm 4,7 \cdot 10^{-7}).$$

(Für $\lambda = 404,7 \mu\mu$ wurde die Rechnung nicht durchgeführt, weil dafür keine Beobachtungen bei der Temperatur der flüssigen Luft vorliegen.)

Die Dichte des gasförmigen Wasserstoffs bei $-252,83^{\circ}$ und $745,52$ mm erhält man hieraus angenähert nach Boyle-Mariotte-Gay-Lussac:

$$\delta_2 = \delta_1 \cdot \frac{1 + \alpha \cdot t_1}{1 + \alpha \cdot t_2} \cdot \frac{H_2}{H_1}$$

$$t_1 = -188,25^{\circ}; H_1 = 758,93 \text{ mm}; \alpha = 0,003672$$

$$t_2 = -252,83^{\circ}; H_2 = 745,52 \text{ mm}.$$

Die Rechnung ergibt

$$\delta_2 = 0,0012249 (\pm 1,4 \cdot 10^{-6}).$$

Der zugehörige Brechungsexponent ν_2 des Wasserstoffs findet sich dann aus

$$\frac{\nu_2^3 - 1}{\nu_2^3 + u} \cdot \frac{1}{\delta_2} = C$$

oder

$$\nu_2 = \sqrt[3]{\frac{1 + u \cdot C \cdot \delta_2}{1 - u \cdot \delta_2}},$$

wo $u = 2$,

$$\nu_2 = 1,001873; 1,001880; 1,001887; 1,001909 (\pm 2 \cdot 10^{-6}).$$

Ist nun ν_f' der beobachtete Brechungsexponent des flüssigen

1) Für $\lambda = 656,3 \mu\mu$ wurde ν_1 interpoliert.

Wasserstoffs gegen den gasförmigen, so folgt der absolute Brechungsexponent n_f aus der Beziehung

$$n_f = n_g \cdot n_f'$$

Man erhält

$$n_f = 1,11133; 1,11183; 1,11212; 1,11389 (\pm 5 \cdot 10^{-5}).$$

Jetzt ist man imstande, aus n_g , d_g , n_f und d_f die Wienersche Formzahl u zu berechnen, denn bisher wurde mit dem Näherungswert $u = 2$ die Rechnung durchgeführt. Es ist also

$$\frac{n_g^2 - 1}{n_g^2 + u} \cdot \frac{1}{d_g} = \frac{n_f^2 - 1}{n_f^2 + u} \cdot \frac{1}{d_f}$$

oder

$$u = \frac{n_f^2 \cdot d_f (n_g^2 - 1) - n_g^2 \cdot d_g (n_f^2 - 1)}{d_g (n_f^2 - 1) - d_f (n_g^2 - 1)}.$$

Als Mittelwert ergibt sich, nach den verschiedenen Wellenlängen berechnet:

2,02

2,02

2,04

1,90

$$u = 2,00 (\pm 0,02).$$

Innerhalb der Fehlergrenze von 1 Proz. ist also

$$[u = 2,00.]$$

Den Fall gesetzt, daß die in der Rechnung ausgeführten Inter- und Extrapolationen der Wirklichkeit entsprechen¹⁾, kann man hieraus schließen, daß die Wasserstoffmolekeln sich dielektrisch so verhalten, als ob ihre Gestalt kugelförmig wäre. Diese Tatsache ist um so beachtenswerter, als für die meisten Flüssigkeiten bisher stark von 2 verschiedene Werte gefunden wurden.

b) *Stickstoff*. Für den Stickstoff gestaltet sich die Rechnung ganz ähnlich.

Nach Scheel²⁾ gilt für den Brechungsexponenten n_g des

1) Ob das der Fall ist, können nur weitere experimentelle Untersuchungen ergeben.

2) Vgl. Anm. 2 auf p. 439.

Stickstoffes bei 0° und 760 mm Druck folgende vereinfachte Dispersionsformel (λ in μ):

$$(n_g - 1) \cdot 10^{-7} = 2903,1 + 22,47 \cdot \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ist die zugehörige Dichte d_g des Stickstoffs bezogen auf Wasser von 4°

$$d_g = 0,001251,$$

so läßt sich wieder unter Benutzung der Ergebnisse Scheels¹⁾ über den Brechungsexponenten n_1 des Stickstoffs bei $-191,76^\circ$ und 771,02 mm die zugehörige Dichte δ_1 des Stickstoffs berechnen. Es ist dann

$$\delta_1 = \frac{n_1^3 - 1}{n_1^3 + u} \cdot \frac{1}{C},$$

wo

$$C = \frac{n_g^3 - 1}{n_g^3 + u} \cdot \frac{1}{d_g}.$$

Nach der erwähnten Dispersionsformel ergeben sich bei 0° und 760 mm folgende Brechungsexponenten n_g :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \lambda \text{ in } \mu\mu & 656,3 & 579,0 & 546,1 & 495,9 \\ n_g & 1,0002958 & 1,0002973 & 1,0002981 & 1,0003024 (\pm 10^{-7}) \end{array}$$

Bei $-191,76^\circ$ und 771,02 mm fand Scheel folgende Brechungsexponenten n_1

$$n_1 = 1,001050_3; 1,001054_5; 1,001058_8; 1,001068_2 (\pm 10^{-6})$$

Setzt man zunächst auch hier $u = 2$, so folgt für $t = 191,76^\circ$ und 771,02 mm

$$0,004441_3$$

$$4434_4$$

$$4440_3$$

$$4416_0$$

$$\delta_1 = 0,004433_0 \pm 6 \cdot 10^{-6} \text{ als Mittelwert.}$$

(Aus dem gleichen Grunde wie beim Wasserstoff wurde die Rechnung für $\lambda = 404,7 \mu\mu$ nicht durchgeführt.)

Nach den Gasgesetzen erhält man für

$$t_2 = 195,88^\circ \text{ und } H_2 = 745,12 \text{ mm}$$

$$\delta_2 = \delta_1 \frac{1 + \alpha \cdot t_1}{1 + \alpha \cdot t_2} \cdot \frac{H_2}{H_1}.$$

1) Vgl. Anm. 2 auf p. 439.

wo

$$t_1 = -191,76^\circ; H_1 = 771,02 \text{ mm}; \alpha = 0,003675$$

$$t_2 = -195,83^\circ; H_2 = 745,12 \text{ mm}$$

die Rechnung ergibt:

$$\delta_2 = 0,004512 \pm 6 \cdot 10^{-6}.$$

Der zugehörige Brechungsexponent ν_2 ist dann:

$$\nu_2 = \sqrt{\frac{1 + u \cdot C \cdot \delta_2}{1 - C \cdot \delta_2}},$$

wo $u = 2$

$$\nu_2 = 1,001072; 1,001077; 1,001080; 1,001096 (\pm 10^{-6}).$$

Hieraus und aus dem beobachteten Brechungsexponenten n_f' des flüssigen Stickstoffs folgt der absolute Brechungsexponent n_f :

$$n_f = \nu_2 \cdot n_f'$$

$$n_f = 1,19841; 1,19873; 1,19917; 1,20141 (\pm 5 \cdot 10^{-5}).$$

Jetzt wird aus n_g , d_g , n_f und d_f ein vorläufiger Wert von u berechnet, mit dem dann die Rechnung wiederholt wird. Dewar¹⁾ bestimmte die Dichte des flüssigen Stickstoffs bei $-195,5^\circ$ und $-210,5^\circ$. Er fand 0,8042 und 0,8792. Daraus ergibt sich d_f bei $-195,83^\circ$

$$d_f = 0,8058 \pm 6 \cdot 10^{-4}.$$

Als Mittelwert ergibt sich, nach den verschiedenen Wellenlängen berechnet:

$$2,08$$

$$2,11$$

$$2,13$$

$$2,22$$

$$u_1 = 2,12 (\pm 0,02).$$

Führt man nun die Rechnung mit diesem vorläufigen u_1 durch, so ergibt sich ganz entsprechend:

$$\delta_1 = 0,004433_1$$

$$\delta_2 = 0,004512_1$$

$$\nu_2 = 1,001073; 1,001078; 1,001081; 1,001096$$

$$n_f = 1,19841; 1,19873; 1,19917; 1,20141$$

1) Vgl. Anm. 2 auf p. 421.

$$2,03$$

$$2,11$$

$$2,13$$

$$2,22$$

$$u_2 = 2,12$$

u ändert sich auch beim Stickstoff nicht. Vergleicht man nun noch die nach Scheel berechnete Dichte mit der für denselben Zustand nach den Gasgesetzen berechneten Dichte δ' , so ergibt sich eine Abweichung von δ_1 und δ'

$$\bullet \quad \delta_1 = 0,004433$$

$$\delta' = 0,004297$$

$$\delta_1 - \delta' = 0,000136$$

Berechnet man δ_2 aus δ_1 mit den Gasgesetzen, so begeht man dem Temperaturunterschied entsprechend mindestens einen Fehler

$$\Delta = 0,000003.$$

Rechnet man nun nochmals, aber mit dem Werte

$$\delta_2 + \Delta = 0,004515,$$

so folgt schließlich wiederum

$$u_3 = 2,12.$$

Als endgültiger Wert von u ist also

$$u = 2,12 \pm 0,02$$

zu betrachten.

Mit dem gleichen Vorbehalt wie beim Wasserstoff kann man auch von den Stickstoffmolekeln sagen, daß sie sich elektrisch so verhalten, als ob ihre Gestalt nahezu kugelförmig wäre.

Schluß.

Zum Schluß folgt eine Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse der Arbeit.

Die Auftriebsmethode wird so weit ausgebaut, daß mit ihr die Dichte des flüssigen Wasserstoffs auf 0,8—0,9‰ genau bestimmt werden kann. Dabei ergeben sich manche technische Einzelheiten, die sich beim Arbeiten mit flüssigem Wasserstoff als nützlich erweisen.

Zur Bestimmung der Brechungsexponenten des flüssigen Wasserstoffs von $\lambda = 656,3 \mu\mu$ bis $\lambda = 404,7 \mu\mu$ wird die Wiedemannsche Methode der Totalreflexion umgestaltet. Die erreichte Genauigkeit ($0,2\%$ von $n - 1$) wird hauptsächlich durch Verwendung eines doppelwandigen Vakuumgefäßes mit angeschmolzenen Planfenstern ermöglicht. Die Versuchsanordnung wird dann noch zur Bestimmung der Dispersion des flüssigen Stickstoffs verwendet.

Die experimentellen Ergebnisse werden dann zur Beobachtung der Wienerschen Formzahl u verwendet. Dabei ergibt sich, die Gültigkeit der vorgenommenen Extrapolationen vorausgesetzt, daß die Wasserstoffmolekeln sich dielektrisch so verhalten, als ob ihre Gestalt kugelförmig, die Stickstoffmolekeln so, als ob ihre Gestalt nahezu kugelförmig wäre. Dabei ist aber zu bemerken, daß die vorliegenden Tatsachen zu einer strengen Prüfung der Theorie noch nicht ausreichen.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, Herrn Professor Dr. Wiener für die Anregung zu dieser Arbeit, ihre dauernde Unterstützung und die Liebenswürdigkeit, mit der er mir die Mittel des Instituts im reichsten Maße zur Verfügung stellte, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Danken möchte ich auch Herrn Privatdozent Dr. Füchtbauer, der durch seinen dauernden, wertvollen Rat die Arbeit wesentlich gefördert hat. Ferner hat Herr Privatdozent Dr. Lilienfeld seine reichen Erfahrungen auf dem Gebiete der Kältetechnik mir in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt.

(Eingegangen 1. August 1914.)

**7. Galvano- und thermomagnetische Effekte
variabler Leiter und Metalle;
von J. Koenigsberger und G. Gottstein.**

Die Untersuchung der galvano- und thermomagnetischen Effekte an den variablen Leitern ergibt eine Bestätigung der Grundannahmen der Elektronentheorie. Sie zeigt, daß jedenfalls die Elektronenzahl in den Formeln richtig berücksichtigt ist. Weil man hauptsächlich Wismut und Eisen zur Prüfung genommen hatte, waren nur die Widersprüche hervorgetreten. Wir hatten aber schon aus den Beobachtungen gefolgert, daß, wie die Theorie verlangt, der Quotient isotherme Halleffektskonstante B_i durch Widerstand R von der Elektronenzahl unabhängig ist, trotz der größten Unterschiede in R bei den variablen Leitern. Man kann dies auch so ausdrücken: es ist $dE_T/E_e = \text{const}$, wenn dE_T die transversale Hallspannung $B^1)$ und E_e die angelegte Spannung in denselben Einheiten ist. Doch ist die elektronentheoretische Deutung für diesen Ausdruck kompliziert

$$= \frac{e \cdot l \cdot V^{4/3} \pi}{V m \cdot V a T}$$

Hingegen ist B_i , wie wir aus den Formeln von Gans ableiten, $= 3\pi/8eN$. Beide Ausdrücke sind mit einem der Struktur und den inneren magnetischen Feldern entsprechenden noch unbekannten Faktor $(1 + \psi)$, worin ψ formal $= f H_m dN/H_a \cdot N$ gesetzt wird, zu multiplizieren.

Die Messungen von Kamerlingh Onnes und B. Beckman²⁾ haben gezeigt, daß in Metallen B auch bei tiefen Temperaturen sich nur wenig ändert, während R bekanntlich sehr stark sinkt. Also bleibt die Elektronenzahl ziemlich

1) Wir haben den Hallkoeffizient jetzt mit B bezeichnet, da R nach dem A.E.F. für den Widerstand bestimmt ist.

2) H. Kamerlingh Onnes u. B. Beckman, Commun. Phys. Lab. Leiden 129 a. 1912; ferner B. Beckman, 129 c. 130 a. 130 b.

konstant, während der Ausdruck B_i/R mit abnehmender Temperatur stark wächst. Theoretisch müßte nach der Formel von Gans der Temperaturkoeffizient von B_i die Änderung der Elektronenzahl ergeben. Doch ist diese Formel noch hinsichtlich der Wirkung der inneren magnetischen Felder zu ergänzen. Daher wird ein derartiger Schluß nur dann richtig sein, wenn die inneren magnetischen Felder der Atome verglichen mit der Elektronenzahl sich wenig ändern, also bei variablen Leitern mit hoher Dissoziationswärme, was durch das Experiment¹⁾ bestätigt wurde. Wenn dagegen wie bei Metallen beide Einflüsse von annähernd gleicher Größe sind, oder wenn wie bei Eisen oder Wismut die Feldvariation weit überwiegt, so ist dN/dt aus dB_i/dt und damit die Größe b der Theorie von Gans $= 2T\partial \log N/\partial T$ nicht berechenbar.

Daher ist auch im allgemeinen die Reduktion des adiabatischen Halleffekts auf den isothermen nicht leicht vorzunehmen. H. Zahn²⁾ hat übrigens gezeigt, daß der isotherme Halleffekt von Wismut bis auf ± 1 Prozent gleich dem adiabatischen Effekt ist. Ein Widerspruch gegen die Theorie von R. Gans liegt darin nicht; dies Resultat zeigt nur, daß die Änderungen der Elektronenzahl klein und vermutlich angenähert \sqrt{T} umgekehrt proportional ist.

Würde man b aus der Temperaturänderung von B_i des Wismuts berechnen, so würde sich ein ganz falscher Wert ergeben wie oben auseinandergesetzt. Daß auch die Thomsonwärme ebenfalls dN/dT nicht richtig gibt, hat der eine schon am andern Ort auseinandergesetzt.

Aus den Gleichungen von Gans lassen sich auch die Formeln für die anderen Effekte ableiten.³⁾

Um die Formel für den isothermen Halleffekt B_i zu erhalten, muß j_y , $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial x$ und $\omega^2 = 0$ gesetzt werden.

Zur Berechnung des Ettingshauseneffekt wird zunächst

1) J. Koenigsberger u. G. Gottstein, *Phys. Zeitschr.* 14. p. 232. 1913.

2) H. Zahn, *Ann. d. Phys.* 23. p. 142. 1907.

3) Vgl. J. Koenigsberger u. G. Gottstein, *Phys. Zeitschr.* 14. p. 232. 1913.

$j_y, w_y, w^2 = 0$ gesetzt. R. Gans hat auch $\partial T / \partial x =$ gesetzt und gelangt dann zu einer Formel, die man in die Form

$$\frac{R}{H \cdot E_x} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{3\alpha}{8e} B_i$$

bringen kann.

Verwendet man für P die Definition wie sie z. B. K. Baedeker¹⁾ in seinem Buch gibt, also $\partial T = -\frac{P \cdot H I}{e}$, worin e die Plattendicke, so ist

$$P = -\frac{3\alpha}{8e} B_i = -2,9 \cdot 10^{-5} \cdot B_i.$$

Da e negativ, hat P dasselbe Zeichen wie B_i und, wie wir gleich sehen werden, ein entgegengesetztes Zeichen wie Q .

Es ist aber fraglich, in wie weit die Bedingung $\partial T / \partial x = 0$ experimentell genau erfüllt ist, und es ist sehr zweifelhaft, ob sie einem adiabatischen Vorgang entspricht. Man kann daher versuchen für den streng adiabatischen Fall: $\partial T / \partial x$ und $\partial T / \partial y$ von 0 verschieden, dagegen w_x und $w_y = 0$, den Hall- und Ettingshauseneffekt zu berechnen.

Aus den Gleichungen von Gans ergibt sich für den Nernst-effekt $Q^2)$

$$= \frac{B_i}{R} \frac{e}{24\alpha} (15 + 7b) = -8,1 \cdot 10^{+3} \cdot \frac{B_i}{R} (1 + 0,47 \cdot b).$$

Diese Formel bestätigt, wie man leicht sieht, die von W. Nernst³⁾ gefundene Beziehung, die zwischen dem von ihm und von Ettingshausen entdeckten Effekt Q und dem Halleffekt B_i besteht, wenn man an Stelle der Temperaturdifferenz in der Definition von Q den Wärmestrom einführt.⁴⁾

1) K. Baedeker, Elektr. Erscheinungen in metall. Leitern. p. 98. Braunschweig 1911.

2) H. Zahn, Phys. Zeitschr. 15. p. 663. 1914.

3) W. Nernst, Ann. d. Phys. 31. p. 775. 1887.

4) H. Zahn, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 5. p. 209. 1908.

(Eingegangen 7. August 1914)

no.

ttt

seq

tor

old

old

e-

c

im

ed

ed

vir

o

bb

er

ad

l-

t-

n

n

g

r

3.

d

1

1